

Fyzika laserů

Kvantová teorie laseru

Kvazidistribuční funkce. Zobecněné uspořádání. Fokkerova-Planckova rovnice.

Jan Šulc

Katedra fyzikální elektroniky
České vysoké učení technické
jan.sulc@fjfi.cvut.cz

22. dubna 2013

1. **Kvantová teorie tlumení, řídicí rovnice**
2. **Aplikace na „atom“, Pauliho rovnice**
3. Poloklasický popis interakce záření s látkou
4. Aplikace na šíření rezonančního záření prostředím
5. Aplikace na laser – kontinuální režim
6. Aplikace na laser – Q-spínání
7. Koherentní šíření impulzů
8. Další jevy v poloklasické aproximaci
9. Spektrum laseru a režim synchronizace módů
10. **Kvantová teorie laseru, F-P rovnice**
11. **F-P rovnice pro záření a atom**
12. **F-P rovnice pro laser**
13. **Statistické vlastnosti laserového záření**

- ▶ Kvantově popisujeme jak prostředí, tak záření.
- ▶ Na rozdíl od poloklasické teorie je možné studovat statistické vlastnosti generovaného záření
 - ▶ Amplituda elektrického pole $\sim \langle \hat{a} \rangle$
 - ▶ Intenzita záření $\sim \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$
 - ▶ Stupeň koherence \sim korelační funkce 2. řádu $\sim \langle \hat{a}^\dagger(t) \hat{a}(t - \tau) \rangle$
- ▶ Použití statistického operátoru, respektive výpočet jeho prvků, je komplikovaný, protože mód pole má nekonečně mnoho stavů.
- ▶ Od výpočtu středních hodnot pomocí statistického operátoru přejdeme k použití **kvazidistribuční funkce** $P(\tilde{\alpha})$:

$$\langle \hat{O} \rangle = \text{Tr} \{ \hat{\rho} \hat{O} \} \quad \Leftrightarrow \quad \langle \hat{O} \rangle = \int P(\tilde{\alpha}) f(\tilde{\alpha}) d\tilde{\alpha}$$

- ▶ $f(\tilde{\alpha})$ je zobecněná funkce přiřazená operátoru \hat{O} .
- ▶ Kvazidistribuční funkce $P(\tilde{\alpha})$ obsahuje stejnou informaci, jako statistický operátor, není ale stanovena jednoznačně.
- ▶ Kvazidistribuční funkci je možné nalézt obecně pro každý systém a to spolu s dohodou o pořadí zápisu operátorů dynamických proměnných (uspořádání).
- ▶ Odvodíme rovnici pro časový vývoj kvazidistribuční funkce (F-P rovnice) a tak určíme dynamiku systému.

Operátory elektromagnetického pole a zobecněná funkce

- ▶ Anihilační a kreační operátory \hat{a} a \hat{a}^\dagger tvoří „bázi“ – úplný soubor operátorů
 - ▶ $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$, $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$
 - ▶ Koherentní stav $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$
 - ▶ Záleží na pořadí $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$
- ▶ Taylorův rozvoj obecného operátoru:
 - ▶ **Normální** uspořádání

$$\hat{O} = \sum_{m,n} o_{mn}^N (\hat{a}^\dagger)^m \hat{a}^n$$

- ▶ **Antinormální** uspořádání

$$\hat{O} = \sum_{m,n} o_{mn}^A \hat{a}^m (\hat{a}^\dagger)^n$$

- ▶ Přiřazené klasická funkce:
 - ▶ Normální uspořádání

$$\bar{O}^N(\alpha, \alpha^*) = \sum_{m,n} o_{mn}^N \alpha^{*m} \alpha^n$$

- ▶ Antinormální uspořádání

$$\bar{O}^A(\alpha, \alpha^*) = \sum_{m,n} o_{mn}^A \alpha^m \alpha^{*n}$$

- ▶ Statistický operátor $\hat{\rho} \Leftrightarrow \Phi_{\mathcal{N}}$ Glauber-Sudarshanova reprezentace

$$\hat{\rho} = \int \Phi_{\mathcal{N}}(\alpha) |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha$$

- ▶ Reálná fce komplexní proměnné $\Phi_{\mathcal{N}}^*(\alpha) = \Phi_{\mathcal{N}}(\alpha)$, $\int \Phi_{\mathcal{N}}(\alpha) d^2\alpha = 1$
- ▶ Koherentní stav $|\gamma\rangle$:

$$\Phi_{\mathcal{N}}(\alpha) = \delta^{(2)}(\alpha - \gamma)$$

- ▶ Záření černého tělesa:

$$\Phi_{\mathcal{N}}(\{\alpha\}) = \prod_{\lambda} \frac{e^{-\frac{|\alpha|_{\lambda}^2}{\langle n_{\lambda} \rangle}}}{\pi \langle n_{\lambda} \rangle}$$

- ▶ Záření ideálního jednomódového laseru:

$$\Phi_{\mathcal{N}}(\alpha) = \frac{\delta(|\alpha| - |\beta|)}{2\pi|\alpha|}$$

- ▶ Střední hodnota libovolného operátoru \hat{O} :

$$\langle \hat{O} \rangle = \int \Phi_{\mathcal{N}}(\alpha) \bar{O}^N(\alpha, \alpha^*) d^2\alpha$$

- ▶ Normálně uspořádaná kvazidistribuční funkce pro jednomódové pole (DC)

$$\Phi_{\mathcal{N}}(\alpha^*, \alpha) = \frac{1}{\pi} \bar{\varrho}^A(\alpha, \alpha^*)$$

Zobecněné c-uspořádání operátorů

- ▶ Uspořádané nekomutující operátory $\tilde{a} = (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_f)$
- ▶ Obecný operátor ve zvoleném, tzv. c-uspořádání

$$\hat{Q} = Q^c(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_f) = \sum_{r_1} \dots \sum_{r_f} Q_{r_1 \dots r_f}^c \hat{a}_1^{r_1} \dots \hat{a}_f^{r_f}$$

- ▶ Přidružená klasická funkce:

$$\bar{Q}^c(\alpha_1, \dots, \alpha_f) = \sum_{r_1} \dots \sum_{r_f} Q_{r_1 \dots r_f}^c \alpha_1^{r_1} \dots \alpha_f^{r_f}$$

- ▶ Zpětná transformace \mathcal{C} :

$$\mathcal{C}\bar{Q}^c(\alpha_1, \dots, \alpha_f) = \hat{Q} = Q^c(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_f) = \int \dots \int \bar{Q}^c(\alpha_1, \dots, \alpha_f) \prod_{i=1}^f \delta^c(\alpha_i - \hat{a}_i) d\alpha_i$$

- ▶ δ -funkce jsou definovány vztahy:
 - ▶ Pro hermitovský operátor \hat{a} je:

$$\delta(\alpha - \hat{a}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi(\alpha - \hat{a})} d\xi$$

- ▶ Pro nehermitovský operátor \hat{a} :

$$\delta(\alpha - \hat{a})\delta(\alpha^* - \hat{a}^\dagger) = \frac{1}{\pi^2} \iint e^{-i\xi(\alpha - \hat{a})} e^{-i\xi^*(\alpha^* - \hat{a}^\dagger)} d^2\xi,$$

- ▶ Výpočet střední hodnoty operátoru Q^c dovoluje definovat kvazidistribuční funkci příslušející ke zvolenému c -uspořádání:

$$\begin{aligned}
 \langle Q^c(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_f) \rangle &= \langle \mathcal{C} \bar{Q}^c(\alpha_1, \dots, \alpha_f) \rangle \\
 &= \left\langle \int \dots \int \bar{Q}^c(\alpha_1, \dots, \alpha_f) \prod_{i=1}^f \delta^c(\alpha_i - \hat{a}_i) d\alpha_i \right\rangle \\
 &= \int \dots \int \bar{Q}^c(\alpha_1, \dots, \alpha_f) \underbrace{\left\langle \prod_{i=1}^f \delta^c(\alpha_i - \hat{a}_i) \right\rangle}_{P_C(\alpha_1, \dots, \alpha_f)} d\alpha_1 \dots d\alpha_f \\
 &= \int \dots \int d\alpha_1 \dots d\alpha_f \bar{Q}^c(\alpha_1, \dots, \alpha_f) P_C(\alpha_1, \dots, \alpha_f).
 \end{aligned}$$

- ▶ Kvazidistribuční funkce je dána střední hodnotou c -uspořádané δ -funkce:

$$\begin{aligned}
 P_C(\alpha_1, \dots, \alpha_f) &= \langle \delta(\alpha_1 - \hat{a}_1) \delta(\alpha_2 - \hat{a}_2) \dots \delta(\alpha_f - \hat{a}_f) \rangle \\
 &= \text{Tr} \{ \hat{\rho}(t) \delta(\alpha_1 - \hat{a}_1) \dots \delta(\alpha_f - \hat{a}_f) \}
 \end{aligned}$$

- ▶ V případě jednoho módu elektromagnetického pole je $P_{\mathcal{N}}(\alpha, \alpha^*) \equiv \Phi_{\mathcal{N}}(\alpha)$.

Časový vývoj kvazidistribuční funkce

- ▶ $\tilde{a} = (\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_f)$ – uspořádaný vektor operátorů kvantového systému ve Schrödingerově obrazu.
- ▶ $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_f)$ – příslušný vektor komplexních proměnných
- ▶ Časový vývoj střední hodnoty operátoru měřitelné \hat{M}

$$\langle \hat{M}^c[\tilde{a}(t_0), t] \rangle = \text{Tr} \left\{ \hat{\rho}(t) \hat{M}^c[\tilde{a}(t_0)] \right\} = \int d\tilde{\alpha}_0 M^c(\tilde{\alpha}_0) P_c(\tilde{\alpha}_0, t)$$

- ▶ Časově proměnná kvazidistribuční funkce:

$$P_c(\tilde{\alpha}_0, t) = \text{Tr} \left\{ \varrho^S(t) \delta^c(\tilde{\alpha}_0 - \tilde{a}_0) \right\}$$

- ▶ Počáteční podmínka $\tilde{\alpha}_0 = \tilde{a}(t_0)$
- ▶ Časový vývoj střední hodnoty $\hat{M}(t) = M^c(\tilde{a}, t)$ operátoru je možné stanovit, je-li znám časový vývoj kvazidistribuční funkce $P_c(\tilde{\alpha}, t)$ spolu s počáteční podmínkou.
- ▶ Potřebujeme pohybovou rovnici pro kvazidistribuční funkci \Rightarrow

Fokkerova-Planckova rovnice

- ▶ Postup odvození z řídicí rovnice:

$$\boxed{\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \dots} + \boxed{P_c(\tilde{\alpha}, t) = \text{Tr} \{ \hat{\rho}(t) \delta^c(\tilde{\alpha} - \tilde{\alpha}) \}} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial P_c}{\partial t} = \dots}$$

- ▶ Vydeme ze známé řídicí rovnice pro obecný markovovský systém:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\rho}^S(t)}{dt} &= \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}^S(t)] - \sum_{i,j} \delta(\omega_i + \omega_j) \times \\ &\times \left\{ \left[\hat{Q}_i^S \hat{Q}_j^S \hat{\rho}^S - \hat{Q}_j^S \hat{\rho}^S \hat{Q}_i^S \right] w_{ij}^+ - \left[\hat{Q}_i^S \hat{\rho}^S \hat{Q}_j^S - \hat{\rho}^S \hat{Q}_j^S \hat{Q}_i^S \right] w_{ji}^- \right\} \end{aligned}$$

- ▶ Levou i pravou stranu řídicí rovnice vynásobíme zobecněnou δ^c -funkcí operátorových proměnných $\delta^c(\tilde{\alpha}_0 - \tilde{\alpha}_0)$ a vyjádříme stopu $\text{Tr}_S \{ \}$ na obou stranách rovnosti:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_c(\tilde{\alpha}_0, t)}{\partial t} &= \text{Tr}_S \left\{ \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}^S(t)] \delta^c(\tilde{\alpha}_0 - \tilde{\alpha}_0) \right\} - \sum_{i,j} \delta(\omega_i, -\omega_j) \times \\ &\times \text{Tr}_S \left\{ \left[\hat{Q}_i^S \hat{Q}_j^S \hat{\rho}^S \delta^c - \hat{Q}_j^S \hat{\rho}^S \hat{Q}_i^S \delta^c \right] w_{ij}^+ - \left[\hat{Q}_i^S \hat{\rho}^S \hat{Q}_j^S \delta^c - \hat{\rho}^S \hat{Q}_j^S \hat{Q}_i^S \delta^c \right] w_{ji}^- \right\} \end{aligned}$$

- Máme:

$$\frac{\partial P_C(\tilde{\alpha}_0, t)}{\partial t} = \text{Tr}_S \left\{ \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}^S(t)] \delta^c(\tilde{\alpha}_0 - \tilde{\alpha}_0) \right\} - \sum_{i,j} \delta(\omega_i, -\omega_j) \times \\ \times \text{Tr}_S \left\{ [\hat{Q}_i^S \hat{Q}_j^S \hat{\rho}^S \delta^c - \hat{Q}_j^S \hat{\rho}^S \hat{Q}_i^S \delta^c] w_{ij}^+ - [\hat{Q}_i^S \hat{\rho}^S \hat{Q}_j^S \delta^c - \hat{\rho}^S \hat{Q}_j^S \hat{Q}_i^S \delta^c] w_{ji}^- \right\}$$

- Provedeme cyklické permutace, aby na prvním místě byl statistický operátor $\hat{\rho}$:

$$\frac{\partial P_C(\tilde{\alpha}_0, t)}{\partial t} = \text{Tr}_S \left\{ \hat{\rho}^S(t) \left(\frac{1}{i\hbar} [\delta^c, \hat{H}] - \sum_{i,j} \delta(\omega_i + \omega_j) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left\{ [\delta^c, \hat{Q}_i^S] \hat{Q}_j^S w_{ij}^+ - \hat{Q}_j^S [\delta^c, \hat{Q}_i^S] w_{ji}^- \right\} \right) \right\}$$

- Zobecněné δ -funkce lze upravit:

$$\delta(\alpha - \hat{a}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi(\alpha - \hat{a})} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi\alpha} e^{i\xi\hat{a}} d\xi = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\xi\hat{a})^n}{n!} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\hat{a})^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} (e^{-i\xi\alpha}) d\xi = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\hat{a} \frac{\partial}{\partial \alpha}} e^{-i\xi\alpha} d\xi = e^{-\hat{a} \frac{\partial}{\partial \alpha}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi\alpha} d\xi = e^{-\hat{a} \frac{\partial}{\partial \alpha}} \delta(\alpha)$$

- Pro c-uspořádanou δ -funkci platí:

$$\delta^c(\tilde{\alpha}_0 - \tilde{\mathbf{a}}_0) = e^{-\tilde{\mathbf{a}}_0 \frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}_0}} \delta(\tilde{\alpha}_0)$$

- Rovnice nabývá tvaru:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_C(\tilde{\alpha}_0, t)}{\partial t} &= \text{Tr}_S \left\{ \hat{\rho}^S(t) \left(\frac{1}{i\hbar} [e^{-\tilde{\mathbf{a}}_0 \frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}_0}}, \hat{H}] - \sum_{i,j} \delta(\omega_i + \omega_j) \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \left([e^{-\tilde{\mathbf{a}}_0 \frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}_0}}, \hat{Q}_i^S] \hat{Q}_j^S w_{ij}^+ - \hat{Q}_j^S [e^{-\tilde{\mathbf{a}}_0 \frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}_0}}, \hat{Q}_i^S] w_{ji}^- \right) \delta(\tilde{\alpha}_0) \right\} \\ &\equiv \text{Tr}_S \left\{ \hat{\rho}^S(t) L' \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}_0}, \tilde{\mathbf{a}}_0 \right) \delta(\tilde{\alpha}_0) \right\}, \end{aligned}$$

kde L' je operátorová funkce.

- Uplatníme komutační relace a tuto operátorovou funkci zapíšeme ve zvoleném c-uspořádání jako \bar{L}'^c . Potom:

$$\frac{\partial P_C(\tilde{\alpha}_0, t)}{\partial t} = \text{Tr}_S \left\{ \hat{\rho}^S(t) \bar{L}'^c \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}_0}, \tilde{\mathbf{a}}_0 \right) \delta(\tilde{\alpha}_0) \right\}$$

- Máme:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial P_C(\tilde{\alpha}_0, t)}{\partial t} &= \text{Tr}_S \left\{ \hat{\rho}^S(t) \bar{L}'^c \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}_0}, \tilde{\alpha}_0 \right) \delta(\tilde{\alpha}_0) \right\} \\
 &= \text{Tr}_S \left\{ \hat{\rho}^S(t) \int \bar{L}'^c \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}_0}, \tilde{\beta}_0 \right) \delta^c(\tilde{\beta}_0 - \tilde{\alpha}_0) d\tilde{\beta}_0 \delta(\tilde{\alpha}_0) \right\} \\
 &= \int d\tilde{\beta}_0 \bar{L}'^c \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}_0}, \tilde{\beta}_0 \right) \text{Tr}_S \left\{ \hat{\rho}^S(t) \delta^c(\tilde{\beta}_0 - \tilde{\alpha}_0) \right\} \delta(\tilde{\alpha}_0) \\
 &= \int d\tilde{\beta}_0 \bar{L}'^c \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}_0}, \tilde{\beta}_0 \right) \underbrace{e^{\tilde{\beta}_0 \frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}_0}} e^{-\tilde{\beta}_0 \frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}_0}}}_{=1} \delta(\tilde{\alpha}_0) P_C(\tilde{\beta}_0, t)
 \end{aligned}$$

- Protože obecně platí:

$$e^{-\tilde{\beta} \frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}}} \delta(\tilde{\alpha}) = \delta(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}),$$






dostaneme hledanou Fokkerovu-Planckovu rovnici:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial P_C(\tilde{\alpha}_0, t)}{\partial t} &= \int d\tilde{\beta}_0 \bar{L}'^c \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}_0}, \tilde{\beta}_0 \right) e^{\tilde{\beta}_0 \frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}_0}} P_C(\tilde{\beta}_0) \delta(\tilde{\alpha}_0 - \tilde{\beta}_0) \\
 &= \bar{L}'^c \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}_0}, \tilde{\alpha}_0 \right) P_C(\tilde{\alpha}_0, t)
 \end{aligned}$$

- ▶ Fokkerova-Planckova rovnice pro určení časového vývoje kvazidistribuční funkce je ekvivalentem řídicí rovnice pro statistický operátor.
- ▶ Na rozdíl od klasické Fokkerovy-Planckovy rovnice může pravá strana této rovnice obsahovat i derivace vyššího řádů než druhého.
- ▶ V mnoha důležitých případech (např. pro tlumený harmonický oscilátor) má tato rovnice tvar:

$$\frac{\partial P_C(\tilde{\alpha}, t)}{\partial t} = - \sum_i \frac{\partial}{\partial \alpha_i} [A_i(\tilde{\alpha}) P_C(\tilde{\alpha}, t)] + \sum_{ij} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} [D_{ij}(\tilde{\alpha}) P_C(\tilde{\alpha}, t)]$$

- ▶ sumy probíhají přes jednotlivé složky vektoru $\tilde{\alpha}$;
- ▶ pravá strana obsahuje nejvýše derivace druhého řádu;
- ▶ veličiny $A_i(\tilde{\alpha})$ a $D_{ij}(\tilde{\alpha})$ označují příslušné driftové a difúzní koeficienty.

-  VRBOVÁ M., ŠULC J.: *Interakce rezonančního záření s látkou*, Skriptum FJFI ČVUT, Praha, 2006
-  LOUISELL, W. H.: *Quantum statistical properties of radiation*, John Wiley & Sons, New York, 1973
-  VRBOVÁ M. a kol.: *Lasery a moderní optika - Oborová encyklopedie*, Prometheus, Praha, 1994
-  VRBOVÁ M., JELÍNKOVÁ H., GAVRILOV P.: *Úvod do laserové techniky*, Skriptum FJFI ČVUT, Praha, 1994 <http://people.fjfi.cvut.cz/sulcjan1/ulat/>
-  Přednášky: <http://people.fjfi.cvut.cz/sulcjan1/FLA/>