Fyzika laserů

Statistické vlastnosti laserového záření a jejich změna v oblasti prahu
Van der Pohlův oscilátor.

Jan Šulc

Katedra fyzikální elektroniky
České vysoké učení technické
jan.sulc@fjfi.cvut.cz

7. května 2012

Program přednášek

1. Kvantová teorie tlumení, řídící rovnice
2. Aplikace na „atom“, Pauliho rovnice
3. Poloklasický popis interakce záření s látkou
4. Aplikace na šíření rezonančního záření prostředím
5. Aplikace na laser – kontinuální režim
6. Aplikace na laser – Q-spínání
7. Koherentní šíření impulzů
8. Další jevy v poloklasické aproximaci
9. Spektrum laseru a režim synchronizace módů
10. Kvantová teorie laseru, F.-P. rovnice
11. F.-P. rovnice pro záření a atom
12. F.-P. rovnice pro laser
13. **Statistické vlastnosti laserového záření**

Fokkerova-Plankova rovnice

- Kvazidistribuční fce $P_c(\tilde{\alpha}, t)$ vs statistický operátor

$$P_c(\tilde{\alpha}, t) = \mathrm{Tr}\left\{\hat{\rho}(t)\delta^c(\tilde{\alpha} - \tilde{a})\right\}$$

Fokkerova-Plankova rovnice

- Kvazidistribuční fce $P_c(\tilde{\alpha}, t)$ vs statistický operátor

$$P_c(\tilde{\alpha}, t) = \mathrm{Tr}\left\{\hat{\rho}(t)\delta^c(\tilde{\alpha} - \tilde{a})\right\}$$

- Časový vývoj střední hodnoty operátoru měřitelné

$$\langle \hat{M}^c[\tilde{a}(t_0), t]\rangle = \mathrm{Tr}\left\{\hat{\rho}(t)\hat{M}^c[\tilde{a}(t_0)]\right\} = \int d\tilde{\alpha}_0 M^c(\tilde{\alpha}_0) P_c(\tilde{\alpha}_0, t)$$

Fokkerova-Plankova rovnice

- Kvazidistribuční fce $P_c(\tilde{\alpha}, t)$ vs statistický operátor

$$P_c(\tilde{\alpha}, t) = \mathrm{Tr}\left\{\hat{\rho}(t)\delta^c(\tilde{\alpha} - \tilde{a})\right\}$$

- Časový vývoj střední hodnoty operátoru měřitelné

$$\langle \hat{M}^c[\tilde{a}(t_0), t]\rangle = \mathrm{Tr}\left\{\hat{\rho}(t)\hat{M}^c[\tilde{a}(t_0)]\right\} = \int d\tilde{\alpha}_0 M^c(\tilde{\alpha}_0) P_c(\tilde{\alpha}_0, t)$$

- Pohybová rovnice pro kavzidisribučni funkci $P_c(\tilde{\alpha})$ – F-P rovnice

$$\frac{\partial P_c}{\partial t}(\tilde{\alpha}_0, t) = \bar{L}^c\left\{\frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}_0}, \tilde{\alpha}_0\right\} P_c(\tilde{\alpha}_0, t)$$

Fokkerova-Plankova rovnice

- Kvazidistribuční fce $P_c(\tilde{\alpha}, t)$ vs statistický operátor

$$P_c(\tilde{\alpha}, t) = \mathrm{Tr}\left\{\hat{\rho}(t)\delta^c(\tilde{\alpha} - \tilde{a})\right\}$$

- Časový vývoj střední hodnoty operátoru měřitelné

$$\langle \hat{M}^c[\tilde{a}(t_0), t]\rangle = \mathrm{Tr}\left\{\hat{\rho}(t)\hat{M}^c[\tilde{a}(t_0)]\right\} = \int d\tilde{\alpha}_0 M^c(\tilde{\alpha}_0) P_c(\tilde{\alpha}_0, t)$$

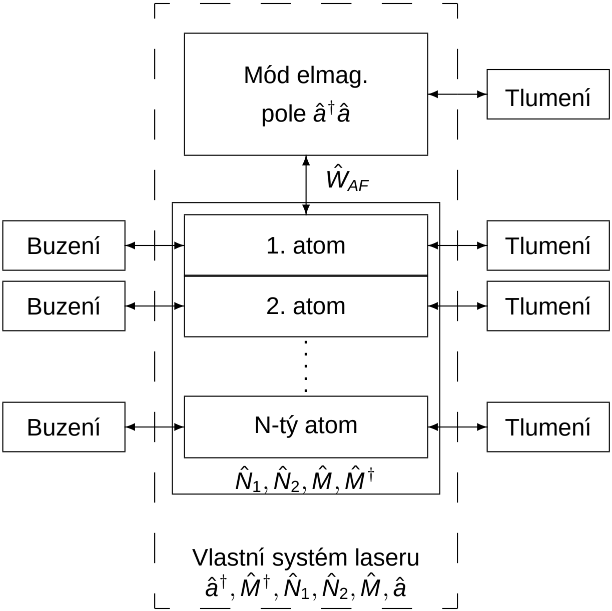
- Pohybová rovnice pro kavzidisribučni funkci $P_c(\tilde{\alpha})$ – F-P rovnice

$$\frac{\partial P_c}{\partial t}(\tilde{\alpha}_0, t) = \bar{L}^c\left\{\frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}_0}, \tilde{\alpha}_0\right\} P_c(\tilde{\alpha}_0, t)$$

- Postup odvození z řídící rovnice:

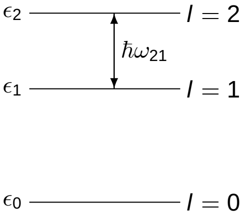
$$\boxed{\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \cdots} + \boxed{P_c(\tilde{\alpha}, t) = \mathrm{Tr}\left\{\hat{\rho}(t)\delta^c(\tilde{\alpha} - \tilde{a})\right\}} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial P_c}{\partial t} = \cdots}$$

Kvantový model laseru



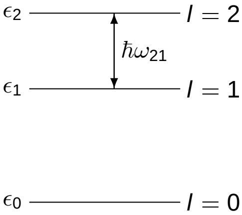
Model aktivního prostředí – tříhladinový atom

- Uvažujme aktivní prostředí tvořené N tříhladinovými kvantovými systémy



Model aktivního prostředí – tříhladinový atom

- Uvažujme aktivní prostředí tvořené N tříhladinovými kvantovými systémy

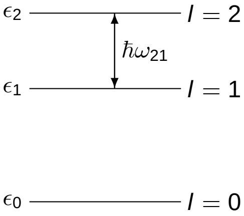


- Příslušné operátory:

$$\hat{N}_l = \sum_{\lambda=1}^{N} (|l\rangle\langle l|)_\lambda, \quad \hat{M} = \sum_{\lambda=1}^{N} (|1\rangle\langle 2|)_\lambda, \quad \hat{M}^\dagger = \sum_{\lambda=1}^{N} (|2\rangle\langle 1|)_\lambda$$

Model aktivního prostředí – tříhladinový atom

- Uvažujme aktivní prostředí tvořené N tříhladinovými kvantovými systémy



- Příslušné operátory:

$$\hat{N}_l = \sum_{\lambda=1}^{N} (|l\rangle\langle l|)_\lambda, \quad \hat{M} = \sum_{\lambda=1}^{N} (|1\rangle\langle 2|)_\lambda, \quad \hat{M}^\dagger = \sum_{\lambda=1}^{N} (|2\rangle\langle 1|)_\lambda$$

- Relativní populace horní a dolní laserové hladiny malá

$$N = N_0 - N_1 - N_2 \sim N_0 \gg N_1, N_2 \gg 1$$

Kvantový model laseru

- Hamiltonián vlastního systému laseru:

$$\hat{H}_0 = \sum_i \epsilon_i \hat{N}_i + \hbar\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{W}_{AF} ,$$

Kvantový model laseru

- Hamiltonián vlastního systému laseru:

$$\hat{H}_0 = \sum_i \epsilon_i \hat{N}_i + \hbar\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{W}_{AF}\,,$$

- Hamiltonián interakce *pole – prostředí*:

$$\hat{W}_{AF} = \mathrm{i}\hbar d(\hat{a}^\dagger \hat{M} - \hat{M}^\dagger \hat{a})$$

Kvantový model laseru

- Hamiltonián vlastního systému laseru:

$$\hat{H}_0 = \sum_i \epsilon_i \hat{N}_i + \hbar\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{W}_{AF}\,,$$

- Hamiltonián interakce *pole – prostředí*:

$$\hat{W}_{AF} = \mathrm{i}\hbar d(\hat{a}^\dagger \hat{M} - \hat{M}^\dagger \hat{a})$$

- Kvazidistribuční funkce:

$$P_{\mathcal{C}}(\alpha^*, \mathcal{M}^*, \mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{M}, \alpha) = \langle \delta^c(\tilde{\alpha} - \hat{\tilde{a}}) \rangle .$$

Kvantový model laseru

- Hamiltonián vlastního systému laseru:

$$\hat{H}_0 = \sum_i \epsilon_i \hat{N}_i + \hbar\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{W}_{AF},$$

- Hamiltonián interakce *pole – prostředí*:

$$\hat{W}_{AF} = \mathrm{i}\hbar d (\hat{a}^\dagger \hat{M} - \hat{M}^\dagger \hat{a})$$

- Kvazidistribuční funkce:

$$P_{\mathcal{C}}(\alpha^*, \mathcal{M}^*, \mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{M}, \alpha) = \langle \delta^c(\tilde{\alpha} - \hat{\tilde{a}}) \rangle.$$

- Předpoklady použité při odvození F-P rovnice:

Kvantový model laseru

- Hamiltonián vlastního systému laseru:

$$\hat{H}_0 = \sum_i \epsilon_i \hat{N}_i + \hbar\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{W}_{AF} ,$$

- Hamiltonián interakce *pole – prostředí*:

$$\hat{W}_{AF} = \mathrm{i}\hbar d(\hat{a}^\dagger \hat{M} - \hat{M}^\dagger \hat{a})$$

- Kvazidistribuční funkce:

$$P_{\mathcal{C}}(\alpha^*, \mathcal{M}^*, \mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{M}, \alpha) = \langle \delta^c(\tilde{\alpha} - \hat{\tilde{a}}) \rangle .$$

- Předpoklady použité při odvození F-P rovnice:
  - Atomy a pole, tvořící vlastní systém laseru, jsou tlumené systémy splňující podmínky Markovovské aproximace;

Kvantový model laseru

- Hamiltonián vlastního systému laseru:

$$\hat{H}_0 = \sum_i \epsilon_i \hat{N}_i + \hbar\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{W}_{AF}\,,$$

- Hamiltonián interakce *pole – prostředí*:

$$\hat{W}_{AF} = \mathrm{i}\hbar d(\hat{a}^\dagger \hat{M} - \hat{M}^\dagger \hat{a})$$

- Kvazidistribuční funkce:

$$P_{\mathcal{C}}(\alpha^*, \mathcal{M}^*, \mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{M}, \alpha) = \langle \delta^c(\tilde{\alpha} - \hat{\hat{a}}) \rangle.$$

- Předpoklady použité při odvození F-P rovnice:
  - Atomy a pole, tvořící vlastní systém laseru, jsou tlumené systémy splňující podmínky Markovovské aproximace;
  - Zanedbáváme depopulaci základní hladiny;

Kvantový model laseru

- Hamiltonián vlastního systému laseru:

$$\hat{H}_0 = \sum_i \epsilon_i \hat{N}_i + \hbar\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{W}_{AF},$$

- Hamiltonián interakce *pole – prostředí*:

$$\hat{W}_{AF} = \mathrm{i}\hbar d (\hat{a}^\dagger \hat{M} - \hat{M}^\dagger \hat{a})$$

- Kvazidistribuční funkce:

$$P_{\mathcal{C}}(\alpha^*, \mathcal{M}^*, \mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{M}, \alpha) = \langle \delta^c(\tilde{\alpha} - \hat{\hat{a}}) \rangle.$$

- Předpoklady použité při odvození F-P rovnice:
  - Atomy a pole, tvořící vlastní systém laseru, jsou tlumené systémy splňující podmínky Markovovské aproximace;
  - Zanedbáváme depopulaci základní hladiny;
  - Ve F-P rovnici zanedbáme derivace vyššího než druhého řádu.

Fokkerova-Planckova rovnice pro jednomódový laser

$$\frac{\partial P_C}{\partial t} = \Bigg\{ -\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[d\mathcal{M} - \left(\frac{\gamma}{2} + \mathrm{i}\omega_c\right)\alpha\right] - \frac{\partial}{\partial \alpha^*}\left[d\mathcal{M}^* - \left(\frac{\gamma}{2} - \mathrm{i}\omega_c\right)\alpha^*\right] -$$

$$-\frac{\partial}{\partial \mathcal{M}}\left[d(\mathcal{N}_2 - \mathcal{N}_1)\alpha - (\Gamma_{12} + \mathrm{i}\omega_a)\mathcal{M}\right] - \frac{\partial}{\partial \mathcal{M}^*}\left[d(\mathcal{N}_2 - \mathcal{N}_1)\alpha^* - (\Gamma_{12} - \mathrm{i}\omega_a)\mathcal{M}^*\right] -$$

$$-\frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_2}\left[R_2 + w_{21}\mathcal{N}_1 - \Gamma_2\mathcal{N}_2 - d(\alpha^*\mathcal{M} + \alpha\mathcal{M}^*)\right] - \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_1}\left[R_1 + w_{12}\mathcal{N}_2 - \Gamma_1\mathcal{N}_1 +\right.$$

$$\left. + d(\alpha^*\mathcal{M} + \alpha\mathcal{M}^*)\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_1^2}\left[R_1 + w_{12}\mathcal{N}_2 + \Gamma_1\mathcal{N}_1 - d(\alpha^*\mathcal{M} + \alpha\mathcal{M}^*)\right] +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_2^2}\left[R_2 + w_{21}\mathcal{N}_1 + \Gamma_2\mathcal{N}_2 - d(\alpha^*\mathcal{M} + \alpha\mathcal{M}^*)\right] +$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_1 \partial \mathcal{N}_2}\left[-w_{12}\mathcal{N}_2 - w_{21}\mathcal{N}_1 + d(\alpha^*\mathcal{M} + \alpha\mathcal{M}^*)\right] +$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_1 \partial \mathcal{M}}\Gamma_1\mathcal{M} + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_1 \partial \mathcal{M}^*}\Gamma_1\mathcal{M}^* + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_2 \partial \mathcal{M}}(-w_{21}\mathcal{M}) +$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_2 \partial \mathcal{M}^*}(-w_{21}\mathcal{M}^*) + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{M} \partial \mathcal{M}^*}\left[R_2 + (\Gamma_1 + 2\Gamma_{12}^{ph})\mathcal{N}_2 + w_{21}\mathcal{N}_1\right] +$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial \mathcal{M}^2} d\alpha\mathcal{M} + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{M}^{*2}} d\alpha^*\mathcal{M}^* + \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*}\gamma\bar{n}\Bigg\} P_C$$

Časový vývoj středních hodnot – soustava Langevinových rovnic

- Fokkerova-Planckova rovnice může být použita pro nalezení rovnic udávajících časový vývoj středních hodnot dynamických proměnných systému $\Rightarrow$ soustava Langevinových rovnic:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\alpha}{dt} &= -\left(\frac{\gamma}{2} + \mathrm{i}\omega_c\right)\alpha + d\mathcal{M} + \mathcal{L}_\alpha, \\
\frac{d\mathcal{M}}{dt} &= -(\Gamma_{12} + \mathrm{i}\omega_a)\mathcal{M} + d(\mathcal{N}_2 - \mathcal{N}_1)\alpha + \mathcal{L}_\mathcal{M}, \\
\frac{d\mathcal{N}_2}{dt} &= R_2 + w_{21}\mathcal{N}_1 - \Gamma_2\mathcal{N}_2 - d(\alpha^*\mathcal{M} + \alpha\mathcal{M}^*) + \mathcal{L}_{\mathcal{N}_2}, \\
\frac{d\mathcal{N}_1}{dt} &= R_1 + w_{12}\mathcal{N}_2 - \Gamma_1\mathcal{N}_1 + d(\alpha^*\mathcal{M} + \alpha\mathcal{M}^*) + \mathcal{L}_{\mathcal{N}_1}
\end{aligned}
$$

Časový vývoj středních hodnot – soustava Langevinových rovnic

- Fokkerova-Planckova rovnice může být použita pro nalezení rovnic udávajících časový vývoj středních hodnot dynamických proměnných systému ⇒ soustava Langevinových rovnic:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\alpha}{dt} &= -\left(\frac{\gamma}{2} + \mathrm{i}\omega_c\right)\alpha + d\mathcal{M} + \mathcal{L}_\alpha, \\
\frac{d\mathcal{M}}{dt} &= -(\Gamma_{12} + \mathrm{i}\omega_a)\mathcal{M} + d(\mathcal{N}_2 - \mathcal{N}_1)\alpha + \mathcal{L}_\mathcal{M}, \\
\frac{d\mathcal{N}_2}{dt} &= R_2 + w_{21}\mathcal{N}_1 - \Gamma_2\mathcal{N}_2 - d(\alpha^*\mathcal{M} + \alpha\mathcal{M}^*) + \mathcal{L}_{\mathcal{N}_2}, \\
\frac{d\mathcal{N}_1}{dt} &= R_1 + w_{12}\mathcal{N}_2 - \Gamma_1\mathcal{N}_1 + d(\alpha^*\mathcal{M} + \alpha\mathcal{M}^*) + \mathcal{L}_{\mathcal{N}_1}
\end{aligned}
$$

- Řešením těchto rovnic lze určit pohyb – drift – maxima kvazidistribuční funkce $P_\mathcal{C}(\tilde{\alpha}, t)$ ve stavovém prostoru a nalézt tak časový vývoj nejpravděpodobnějších hodnot vektoru $\tilde{\alpha}$.

Časový vývoj středních hodnot – soustava Langevinových rovnic

- Fokkerova-Planckova rovnice může být použita pro nalezení rovnic udávajících časový vývoj středních hodnot dynamických proměnných systému $\Rightarrow$ soustava Langevinových rovnic:

$$\begin{aligned}
\frac{d\alpha}{dt} &= -\left(\frac{\gamma}{2} + \mathrm{i}\omega_c\right)\alpha + d\mathcal{M} + \mathcal{L}_\alpha, \\
\frac{d\mathcal{M}}{dt} &= -(\Gamma_{12} + \mathrm{i}\omega_a)\mathcal{M} + d(\mathcal{N}_2 - \mathcal{N}_1)\alpha + \mathcal{L}_\mathcal{M}, \\
\frac{d\mathcal{N}_2}{dt} &= R_2 + w_{21}\mathcal{N}_1 - \Gamma_2\mathcal{N}_2 - d(\alpha^*\mathcal{M} + \alpha\mathcal{M}^*) + \mathcal{L}_{\mathcal{N}_2}, \\
\frac{d\mathcal{N}_1}{dt} &= R_1 + w_{12}\mathcal{N}_2 - \Gamma_1\mathcal{N}_1 + d(\alpha^*\mathcal{M} + \alpha\mathcal{M}^*) + \mathcal{L}_{\mathcal{N}_1}
\end{aligned}$$

- Řešením těchto rovnic lze určit pohyb – drift – maxima kvazidistribuční funkce $P_\mathcal{C}(\tilde{\alpha}, t)$ ve stavovém prostoru a nalézt tak časový vývoj nejpravděpodobnějších hodnot vektoru $\tilde{\alpha}$.
- Funkce $\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{L}_\mathcal{M}, \mathcal{L}_{\mathcal{N}_2}, \mathcal{L}_{\mathcal{N}_1}$ jsou náhodné (v čase fluktuující) Langevinovy síly, jejichž autokorelační funkce je δ-funkcí časového zpoždění.

Časový vývoj středních hodnot – soustava Langevinových rovnic

- Fokkerova-Planckova rovnice může být použita pro nalezení rovnic udávajících časový vývoj středních hodnot dynamických proměnných systému ⇒ soustava Langevinových rovnic:

$$\begin{aligned}
\frac{d\alpha}{dt} &= -\left(\frac{\gamma}{2} + \mathrm{i}\omega_c\right)\alpha + d\mathcal{M} + \mathcal{L}_\alpha, \\
\frac{d\mathcal{M}}{dt} &= -(\Gamma_{12} + \mathrm{i}\omega_a)\mathcal{M} + d(\mathcal{N}_2 - \mathcal{N}_1)\alpha + \mathcal{L}_\mathcal{M}, \\
\frac{d\mathcal{N}_2}{dt} &= R_2 + w_{21}\mathcal{N}_1 - \Gamma_2\mathcal{N}_2 - d(\alpha^*\mathcal{M} + \alpha\mathcal{M}^*) + \mathcal{L}_{\mathcal{N}_2}, \\
\frac{d\mathcal{N}_1}{dt} &= R_1 + w_{12}\mathcal{N}_2 - \Gamma_1\mathcal{N}_1 + d(\alpha^*\mathcal{M} + \alpha\mathcal{M}^*) + \mathcal{L}_{\mathcal{N}_1}
\end{aligned}$$

- Řešením těchto rovnic lze určit pohyb – drift – maxima kvazidistribuční funkce $P_\mathcal{C}(\tilde{\alpha}, t)$ ve stavovém prostoru a nalézt tak časový vývoj nejpravděpodobnějších hodnot vektoru $\tilde{\alpha}$.
- Funkce $\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{L}_\mathcal{M}, \mathcal{L}_{\mathcal{N}_2}, \mathcal{L}_{\mathcal{N}_1}$ jsou náhodné (v čase fluktuující) Langevinovy síly, jejichž autokorelační funkce je δ-funkcí časového zpoždění.
- Budeme hledat řešení této soustavy pro pomalu proměnné amplitudy:

$$\alpha(t) = \alpha'(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}, \quad \mathcal{M}(t) = \mathcal{M}'(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}.$$

Langevinovy rovnice pro pomalu proměnné amplitudy

- Soustava rovnic pro pomalu proměnné amplitudy má tvar:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\alpha'}{dt} &= -\left[\frac{\gamma}{2} + \mathrm{i}(\omega_c - \omega_0)\right]\alpha' + d\mathcal{M}' + g_\alpha, \\
\frac{d\mathcal{M}'}{dt} &= -\left[\Gamma_{12} + \mathrm{i}(\omega_a - \omega_0)\right]\mathcal{M}' + d(\mathcal{N}_2 - \mathcal{N}_1)\alpha' + g_{\mathcal{M}}, \\
\frac{d\mathcal{N}_2}{dt} &= R_2 + w_{21}\mathcal{N}_1 - \Gamma_2\mathcal{N}_2 - d(\alpha'^*\mathcal{M}' + \alpha'\mathcal{M}'^*) + g_{\mathcal{N}_2}, \\
\frac{d\mathcal{N}_1}{dt} &= R_1 + w_{12}\mathcal{N}_2 - \Gamma_1\mathcal{N}_1 + d(\alpha'^*\mathcal{M}' + \alpha'\mathcal{M}'^*) + g_{\mathcal{N}_1}.
\end{aligned}
$$

Langevinovy rovnice pro pomalu proměnné amplitudy

- Soustava rovnic pro pomalu proměnné amplitudy má tvar:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\alpha'}{dt} &= -\left[\frac{\gamma}{2} + \mathrm{i}(\omega_c - \omega_0)\right]\alpha' + d\mathcal{M}' + g_\alpha, \\
\frac{d\mathcal{M}'}{dt} &= -\left[\Gamma_{12} + \mathrm{i}(\omega_a - \omega_0)\right]\mathcal{M}' + d(\mathcal{N}_2 - \mathcal{N}_1)\alpha' + g_{\mathcal{M}}, \\
\frac{d\mathcal{N}_2}{dt} &= R_2 + w_{21}\mathcal{N}_1 - \Gamma_2\mathcal{N}_2 - d(\alpha'^*\mathcal{M}' + \alpha'\mathcal{M}'^*) + g_{\mathcal{N}_2}, \\
\frac{d\mathcal{N}_1}{dt} &= R_1 + w_{12}\mathcal{N}_2 - \Gamma_1\mathcal{N}_1 + d(\alpha'^*\mathcal{M}' + \alpha'\mathcal{M}'^*) + g_{\mathcal{N}_1}.
\end{aligned}
$$

- Postupně budeme eliminovat jednotlivé proměnné až na amplitudy pole

Zanedbání populace dolní laserové hladiny

- 1. předpoklad – rychlá relaxace dolní laserové hladiny, tj. $\Gamma_1 \gg$ ostatní Γ $\Rightarrow N_1 \doteq 0 \Rightarrow P_{\mathcal{C}}$ nezávisí na $\mathcal{N}_1$, takže $\partial P_{\mathcal{C}} / \partial \mathcal{N}_1 = 0$ a $\partial^2 P_{\mathcal{C}} / \partial \mathcal{N}_1^2 = 0$.

Zanedbání populace dolní laserové hladiny

- 1. předpoklad – rychlá relaxace dolní laserové hladiny, tj. $\Gamma_1 \gg$ ostatní Γ $\Rightarrow N_1 \doteq 0 \Rightarrow P_{\mathcal{C}}$ nezávisí na $\mathcal{N}_1$, takže $\partial P_{\mathcal{C}}/\partial \mathcal{N}_1 = 0$ a $\partial^2 P_{\mathcal{C}}/\partial \mathcal{N}_1^2 = 0$.
- Po eliminaci N_1 máme

$$
\begin{aligned}
\frac{d\alpha'}{dt} &= -\left[\frac{\gamma}{2} + \mathrm{i}(\omega_c - \omega_0)\right]\alpha' + d\mathcal{M}' + g_\alpha, \\
\frac{d\mathcal{M}'}{dt} &= -[\Gamma_{12} - \mathrm{i}(\omega_0 - \omega_a)]\mathcal{M}' + d\mathcal{N}_2\alpha' + g_{\mathcal{M}}, \\
\frac{d\mathcal{N}_2}{dt} &= R_2 - \Gamma_2\mathcal{N}_2 - B + g_{\mathcal{N}_2},
\end{aligned}
$$

kde:

$$B = d(\alpha'^*\mathcal{M}' + \alpha'\mathcal{M}'^*).$$

Zanedbání populace dolní laserové hladiny

Fokkerova-Planckova rovnice pro $\mathcal{N}_1 \approx 0$, $\partial P_\mathcal{C}/\partial\mathcal{N}_1 = 0$ a $\partial^2 P_\mathcal{C}/\partial\mathcal{N}_1^2 = 0$

$$\frac{\partial P_\mathcal{C}}{\partial t} = \Big\{ -\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[d\mathcal{M} - \left(\frac{\gamma}{2} + \mathrm{i}\omega_c\right)\alpha\right] - \frac{\partial}{\partial\alpha^*}\left[d\mathcal{M}^* - \left(\frac{\gamma}{2} - \mathrm{i}\omega_c\right)\alpha^*\right] -$$

$$-\frac{\partial}{\partial\mathcal{M}}\left[d\mathcal{N}_2\alpha - (\Gamma_{12} + \mathrm{i}\omega_a)\mathcal{M}\right] - \frac{\partial}{\partial\mathcal{M}^*}\left[d\mathcal{N}_2\alpha^* - (\Gamma_{12} - \mathrm{i}\omega_a)\mathcal{M}^*\right] -$$

$$-\frac{\partial}{\partial\mathcal{N}_2}\left[R_2 - \Gamma_2\mathcal{N}_2 - d(\alpha^*\mathcal{M} + \alpha\mathcal{M}^*)\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\mathcal{N}_2^2}\left[R_2 + \Gamma_2\mathcal{N}_2 - d(\alpha^*\mathcal{M} + \alpha\mathcal{M}^*)\right] +$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial\mathcal{N}_2\partial\mathcal{M}}(-w_{21}\mathcal{M}) + \frac{\partial^2}{\partial\mathcal{N}_2\partial\mathcal{M}^*}(-w_{21}\mathcal{M}^*) + \frac{\partial^2}{\partial\mathcal{M}\partial\mathcal{M}^*}\left[R_2 + (\Gamma_1 + 2\Gamma_{12}^{ph})\mathcal{N}_2\right] +$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial\mathcal{M}^2} d\alpha\mathcal{M} + \frac{\partial^2}{\partial\mathcal{M}^{*2}} d\alpha^*\mathcal{M}^* + \frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\alpha^*}\gamma\bar{n} \Big\} P_\mathcal{C}$$

Adiabatická eliminace obsazení horní hladiny

- 2. předpoklad – rychlost relaxace polarizace $\Gamma_{12} \approx \Gamma_1/2$ je velká v porovnání s γ a s Γ_2, takže můžeme zanedbat derivaci $\partial\mathcal{M}'/dt$ oproti $\Gamma_{12}\mathcal{M}'$.

Adiabatická eliminace obsazení horní hladiny

- 2. předpoklad – rychlost relaxace polarizace $\Gamma_{12} \approx \Gamma_1/2$ je velká v porovnání s γ a s Γ_2, takže můžeme zanedbat derivaci $\partial \mathcal{M}'/dt$ oproti $\Gamma_{12}\mathcal{M}'$.
- Z rovnice pro polarizaci je možné vyjádřit okamžitou hodnotu amplitudy polarizace:

$$\mathcal{M}' = \frac{d\mathcal{N}_2\alpha' + g_{\mathcal{M}}}{\Gamma_{12} - \mathrm{i}(\omega_0 - \omega_a)},$$

Adiabatická eliminace obsazení horní hladiny

- 2. předpoklad – rychlost relaxace polarizace $\Gamma_{12} \approx \Gamma_1/2$ je velká v porovnání s γ a s Γ_2, takže můžeme zanedbat derivaci $\partial\mathcal{M}'/dt$ oproti $\Gamma_{12}\mathcal{M}'$.
- Z rovnice pro polarizaci je možné vyjádřit okamžitou hodnotu amplitudy polarizace:
$$\mathcal{M}' = \frac{d\mathcal{N}_2\alpha' + g_{\mathcal{M}}}{\Gamma_{12} - \mathrm{i}(\omega_0 - \omega_a)},$$
- ...a dosadit ji do zbývajících rovnic pro pole α' a $\mathcal{N}_2$.

Adiabatická eliminace obsazení horní hladiny

- 2. předpoklad – rychlost relaxace polarizace $\Gamma_{12} \approx \Gamma_1/2$ je velká v porovnání s γ a s Γ_2, takže můžeme zanedbat derivaci $\partial \mathcal{M}'/dt$ oproti $\Gamma_{12}\mathcal{M}'$.
- Z rovnice pro polarizaci je možné vyjádřit okamžitou hodnotu amplitudy polarizace:

$$\mathcal{M}' = \frac{d\mathcal{N}_2\alpha' + g_{\mathcal{M}}}{\Gamma_{12} - \mathrm{i}(\omega_0 - \omega_a)},$$

- ...a dosadit ji do zbývajících rovnic pro pole α' a $\mathcal{N}_2$.
- Máme:

$$\frac{d\alpha'}{dt} = \frac{1}{2}\left(\mathcal{K}\mathcal{N}_2 - \gamma + \mathrm{i}\left[\frac{\mathcal{K}\mathcal{N}_2}{\Gamma_{12}}(\omega_0 - \omega_a) - 2(\omega_c - \omega_0)\right]\right)\alpha' + f_\alpha,$$

$$\frac{d\mathcal{N}_2}{dt} = R_2\left[1 - \frac{\mathcal{K}}{2\Gamma_{12}}\right] - \left[\Gamma_2 + \mathcal{K} + \mathcal{K}\left|\alpha'\right|^2\right]\mathcal{N}_2 + f_{\mathcal{N}_2}.$$

kde:

$$\mathcal{K} = \frac{2\Gamma_{12}d^2}{\Gamma_{12}^2 + (\omega_0 - \omega_a)^2}, \quad f_\alpha(t) = g_\alpha(t) + \frac{dg_{\mathcal{M}}(t)}{\Gamma_{12} - \mathrm{i}(\omega_0 - \omega_a)}$$

$$f_{\mathcal{N}_2}(t) = g_{\mathcal{N}_\in}(t) - d\left[\frac{\alpha'^* g_{\mathcal{M}}(t)}{\Gamma_{12} - \mathrm{i}(\omega_0 - \omega_a)} + \frac{\alpha' g_{\mathcal{M}^*}(t)}{\Gamma_{12} + \mathrm{i}(\omega_0 - \omega_a)}\right]$$

Adiabatická eliminace obsazení horní hladiny

- Máme:

$$\frac{d\alpha'}{dt} = \frac{1}{2}\left(\mathcal{K}\mathcal{N}_2 - \gamma + \mathrm{i}\left[\frac{\mathcal{K}\mathcal{N}_2}{\Gamma_{12}}(\omega_0 - \omega_a) - 2(\omega_c - \omega_0)\right]\right)\alpha' + f_\alpha,$$

$$\frac{d\mathcal{N}_2}{dt} = R_2\left[1 - \frac{\mathcal{K}}{2\Gamma_{12}}\right] - \left[\Gamma_2 + \mathcal{K} + \mathcal{K}\left|\alpha'\right|^2\right]\mathcal{N}_2 + f_{\mathcal{N}_2}.$$

kde:

$$\mathcal{K} = \frac{2\Gamma_{12}d^2}{\Gamma_{12}^2 + (\omega_0 - \omega_a)^2}, \quad f_\alpha(t) = g_\alpha(t) + \frac{dg_{\mathcal{M}}(t)}{\Gamma_{12} - \mathrm{i}(\omega_0 - \omega_a)}$$

$$f_{\mathcal{N}_2}(t) = g_{\mathcal{N}_\in}(t) - d\left[\frac{\alpha'^* g_{\mathcal{M}}(t)}{\Gamma_{12} - \mathrm{i}(\omega_0 - \omega_a)} + \frac{\alpha' g_{\mathcal{M}^*}(t)}{\Gamma_{12} + \mathrm{i}(\omega_0 - \omega_a)}\right]$$

Adiabatická eliminace obsazení horní hladiny

- Máme:

$$\frac{d\alpha'}{dt} = \frac{1}{2}\left(\mathcal{K}\mathcal{N}_2 - \gamma + \mathrm{i}\left[\frac{\mathcal{K}\mathcal{N}_2}{\Gamma_{12}}(\omega_0 - \omega_a) - 2(\omega_c - \omega_0)\right]\right)\alpha' + f_\alpha,$$

$$\frac{d\mathcal{N}_2}{dt} = R_2\left[1 - \frac{\mathcal{K}}{2\Gamma_{12}}\right] - \left[\Gamma_2 + \mathcal{K} + \mathcal{K}\left|\alpha'\right|^2\right]\mathcal{N}_2 + f_{\mathcal{N}_2}.$$

kde:

$$\mathcal{K} = \frac{2\Gamma_{12}d^2}{\Gamma_{12}^2 + (\omega_0 - \omega_a)^2}, \quad f_\alpha(t) = g_\alpha(t) + \frac{dg_{\mathcal{M}}(t)}{\Gamma_{12} - \mathrm{i}(\omega_0 - \omega_a)}$$

$$f_{\mathcal{N}_2}(t) = g_{\mathcal{N}_\in}(t) - d\left[\frac{\alpha'^* g_{\mathcal{M}}(t)}{\Gamma_{12} - \mathrm{i}(\omega_0 - \omega_a)} + \frac{\alpha' g_{\mathcal{M}^*}(t)}{\Gamma_{12} + \mathrm{i}(\omega_0 - \omega_a)}\right]$$

- 3. předpoklad – **rezonance** generovaného pole (ω_0) s rezonanční frekvencí přechodu atomů (ω_a), tj. $\omega_0 = \omega_a$ a s rezonátor je naladěn taky do rezonance, tj. $\omega_0 = \omega_c$

Adiabatická eliminace obsazení horní hladiny

- Máme:

$$\frac{d\alpha'}{dt} = \frac{1}{2}\left(\mathcal{K}\mathcal{N}_2 - \gamma + \mathrm{i}\left[\frac{\mathcal{K}\mathcal{N}_2}{\Gamma_{12}}(\omega_0 - \omega_a) - 2(\omega_c - \omega_0)\right]\right)\alpha' + f_\alpha,$$

$$\frac{d\mathcal{N}_2}{dt} = R_2\left[1 - \frac{\mathcal{K}}{2\Gamma_{12}}\right] - \left[\Gamma_2 + \mathcal{K} + \mathcal{K}\left|\alpha'\right|^2\right]\mathcal{N}_2 + f_{\mathcal{N}_2}.$$

kde:

$$\mathcal{K} = \frac{2\Gamma_{12}d^2}{\Gamma_{12}^2 + (\omega_0 - \omega_a)^2}, \quad f_\alpha(t) = g_\alpha(t) + \frac{dg_{\mathcal{M}}(t)}{\Gamma_{12} - \mathrm{i}(\omega_0 - \omega_a)}$$

$$f_{\mathcal{N}_2}(t) = g_{\mathcal{N}_\in}(t) - d\left[\frac{\alpha'^* g_{\mathcal{M}}(t)}{\Gamma_{12} - \mathrm{i}(\omega_0 - \omega_a)} + \frac{\alpha' g_{\mathcal{M}^*}(t)}{\Gamma_{12} + \mathrm{i}(\omega_0 - \omega_a)}\right]$$

- 3. předpoklad – **rezonance** generovaného pole (ω_0) s rezonanční frekvencí přechodu atomů (ω_a), tj. $\omega_0 = \omega_a$ a s rezonátor je naladěn taky do rezonance, tj. $\omega_0 = \omega_c$
- 4. předpoklad – pro plynové lasery má člen $\mathcal{K}/2\Gamma_{12}$ hodnotu $\sim 10^{-8} \Rightarrow$ lze ho zanedbat.

Adiabatická eliminace obsazení horní hladiny

- Máme:

$$\frac{d\alpha'}{dt} = \frac{1}{2}\left(\mathcal{K}\mathcal{N}_2 - \gamma + \mathrm{i}\left[\frac{\mathcal{K}\mathcal{N}_2}{\Gamma_{12}}(\omega_0 - \omega_a) - 2(\omega_c - \omega_0)\right]\right)\alpha' + f_\alpha,$$

$$\frac{d\mathcal{N}_2}{dt} = R_2\left[1 - \frac{\mathcal{K}}{2\Gamma_{12}}\right] - \left[\Gamma_2 + \mathcal{K} + \mathcal{K}\left|\alpha'\right|^2\right]\mathcal{N}_2 + f_{\mathcal{N}_2}.$$

kde:

$$\mathcal{K} = \frac{2\Gamma_{12}d^2}{\Gamma_{12}^2 + (\omega_0 - \omega_a)^2}, \quad f_\alpha(t) = g_\alpha(t) + \frac{dg_{\mathcal{M}}(t)}{\Gamma_{12} - \mathrm{i}(\omega_0 - \omega_a)}$$

$$f_{\mathcal{N}_2}(t) = g_{\mathcal{N}_\in}(t) - d\left[\frac{\alpha'^* g_{\mathcal{M}}(t)}{\Gamma_{12} - \mathrm{i}(\omega_0 - \omega_a)} + \frac{\alpha' g_{\mathcal{M}^*}(t)}{\Gamma_{12} + \mathrm{i}(\omega_0 - \omega_a)}\right]$$

- 3. předpoklad – **rezonance** generovaného pole (ω_0) s rezonanční frekvencí přechodu atomů (ω_a), tj. $\omega_0 = \omega_a$ a s rezonátor je naladěn taky do rezonance, tj. $\omega_0 = \omega_c$
- 4. předpoklad – pro plynové lasery má člen $\mathcal{K}/2\Gamma_{12}$ hodnotu $\sim 10^{-8} \Rightarrow$ lze ho zanedbat.
- 5. předpoklad – rychlost relaxace horní laserové hladiny ve srovnání s relaxací pole v rezonátoru je vysoká, tj. $\Gamma_{21} \ll \gamma$ a $\Gamma_2\mathcal{N}_2 \gg d\mathcal{N}_2/dt \Rightarrow$

$$\mathcal{N}_2 \cong \frac{R_2 + f_{\mathcal{N}_2}}{\Gamma_2 + \mathcal{K}\left|\alpha'\right|^2}$$

F-P rovnice pro jednomódový laser

- Výrazy pro polarizaci a populaci horní laserové hladiny dosadíme do původní F-P rovnice a do rovnice pro amplitudu pole:

$$\frac{\partial P_{\mathcal{C}}}{\partial t} = \left\{ -\frac{\partial}{\partial \alpha'}\mathcal{A}_\alpha + \frac{\partial}{\partial \alpha'^\star}\mathcal{A}^\star_\alpha + \frac{\partial^2}{\partial \alpha'^2}D^F_{\alpha\alpha} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha'^{\star 2}}D^F_{\alpha^\star\alpha^\star} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha'\partial \alpha'^\star}2D^F_{\alpha^\star\alpha} \right\} P_{\mathcal{C}}$$

$$\frac{\partial \alpha'}{\partial t} = \mathcal{A}_\alpha + \mathcal{G}_\alpha$$

F-P rovnice pro jednomódový laser

- Výrazy pro polarizaci a populaci horní laserové hladiny dosadíme do původní F-P rovnice a do rovnice pro amplitudu pole:

$$\frac{\partial P_{\mathcal{C}}}{\partial t} = \left\{ -\frac{\partial}{\partial \alpha'}\mathcal{A}_\alpha + \frac{\partial}{\partial \alpha'^\star}\mathcal{A}^\star_\alpha + \frac{\partial^2}{\partial \alpha'^2}D^F_{\alpha\alpha} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha'^{\star 2}}D^F_{\alpha^\star\alpha^\star} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha' \partial \alpha'^\star} 2D^F_{\alpha^\star\alpha} \right\} P_{\mathcal{C}}$$

$$\frac{\partial \alpha'}{\partial t} = \mathcal{A}_\alpha + \mathcal{G}_\alpha$$

- $\mathcal{A}_\alpha$ – nelineární součinitel „driftu" – časové změny

$$\mathcal{A}_\alpha = \frac{1}{2}\left[\frac{\mathcal{K} R_2}{\Gamma_2 + \mathcal{K} \mid \alpha' \mid^2} - \gamma \right] \alpha'$$

F-P rovnice pro jednomódový laser

- Výrazy pro polarizaci a populaci horní laserové hladiny dosadíme do původní F-P rovnice a do rovnice pro amplitudu pole:

$$\frac{\partial P_{\mathcal{C}}}{\partial t} = \left\{ -\frac{\partial}{\partial \alpha'} \mathcal{A}_\alpha + \frac{\partial}{\partial \alpha'^\star} \mathcal{A}_\alpha^\star + \frac{\partial^2}{\partial \alpha'^2} D^F_{\alpha\alpha} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha'^{\star 2}} D^F_{\alpha^\star\alpha^\star} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha' \partial \alpha'^\star} 2D^F_{\alpha^\star\alpha} \right\} P_{\mathcal{C}}$$

$$\frac{\partial \alpha'}{\partial t} = \mathcal{A}_\alpha + \mathcal{G}_\alpha$$

- $\mathcal{A}_\alpha$ – nelineární součinitel „driftu“ – časové změny

$$\mathcal{A}_\alpha = \frac{1}{2} \left[\frac{\mathcal{K} R_2}{\Gamma_2 + \mathcal{K} \mid \alpha' \mid^2} - \gamma \right] \alpha'$$

- $D^F_{\alpha\alpha}$ – součinitel „difůze“

$$\langle \mathcal{G}_\alpha(s) \mathcal{G}_\alpha(t) \rangle_R = 2 \langle D^F_{\alpha\alpha} \rangle \delta(s-t),$$
$$\langle \mathcal{G}_{\alpha^*}(s) \mathcal{G}_\alpha(t) \rangle_R = 2 \langle D^F_{\alpha^*\alpha} \rangle \delta(s-t)$$

přičemž:

$$\mathcal{G}_\alpha = \frac{\mathcal{K}}{2} \frac{\alpha'_c}{\Gamma_2 + \mathcal{K} |\alpha'|^2} f_{\mathcal{N}_2}(t) + f_\alpha(t)$$

F-P rovnice pro jednomódový laser

- Ve F-P rovnici jsme eliminovali všechny proměnné, až na pole

$$\frac{\partial P_{\mathcal{C}}}{\partial t} = \left\{ -\frac{\partial}{\partial \alpha'} \mathcal{A}_{\alpha} + \frac{\partial}{\partial \alpha'^{*}} \mathcal{A}^{*}_{\alpha'} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha'^2} D^{F}_{\alpha\alpha} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha'^{*2}} D^{F}_{\alpha^{*}\alpha^{*}} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha' \partial \alpha'^{*}} 2D^{F}_{\alpha^{*}\alpha} \right\} P_{\mathcal{C}}$$

F-P rovnice pro jednomódový laser

- Ve F-P rovnici jsme eliminovali všechny proměnné, až na pole

$$\frac{\partial P_{\mathcal{C}}}{\partial t} = \left\{ -\frac{\partial}{\partial \alpha'}\mathcal{A}_{\alpha} + \frac{\partial}{\partial \alpha'^*}\mathcal{A}^*_{\alpha'} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha'^2} D^F_{\alpha\alpha} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha'^{*2}} D^F_{\alpha^*\alpha^*} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha' \partial \alpha'^*} 2D^F_{\alpha^*\alpha} \right\} P_{\mathcal{C}}$$

- Linearizace driftového členu v okolí stacionárního řešení rovnice pro α', předpokládáme, že $I \simeq I_0 = |\alpha|_0^2$

$$\mathcal{A}_{\alpha} = \frac{1}{2}\left[\frac{\mathcal{K}R_2}{\Gamma_2 + \mathcal{K}I} - \gamma\right]\alpha' \cong \frac{\gamma}{2}\left[\Pi - SI\right]\alpha'$$

kde:

$$\Pi = \frac{\mathcal{K}R_2}{\gamma(\Gamma_2 + \mathcal{K}I_0)}\left[1 + \frac{\mathcal{K}I_0}{\Gamma_2 + \mathcal{K}I_0}\right] - 1, \quad S = \frac{\mathcal{K}^2 R_2}{\gamma(\Gamma_2 + \mathcal{K}I_0)^2}$$

- Ve F-P rovnici jsme eliminovali všechny proměnné, až na pole

$$\frac{\partial P_{\mathcal{C}}}{\partial t} = \left\{ -\frac{\partial}{\partial \alpha'} \mathcal{A}_{\alpha} + \frac{\partial}{\partial \alpha'^*} \mathcal{A}^*_{\alpha'} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha'^2} D^F_{\alpha\alpha} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha'^{*2}} D^F_{\alpha^*\alpha^*} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha' \partial \alpha'^*} 2D^F_{\alpha^*\alpha} \right\} P_{\mathcal{C}}$$

- Linearizace driftového členu v okolí stacionárního řešení rovnice pro α', předpokládáme, že $I \simeq I_0 = |\alpha|_0^2$

$$\mathcal{A}_{\alpha} = \frac{1}{2} \left[\frac{\mathcal{K} R_2}{\Gamma_2 + \mathcal{K} I} - \gamma \right] \alpha' \cong \frac{\gamma}{2} \left[\Pi - S I \right] \alpha'$$

kde:

$$\Pi = \frac{\mathcal{K} R_2}{\gamma(\Gamma_2 + \mathcal{K} I_0)} \left[1 + \frac{\mathcal{K} I_0}{\Gamma_2 + \mathcal{K} I_0} \right] - 1, \quad S = \frac{\mathcal{K}^2 R_2}{\gamma(\Gamma_2 + \mathcal{K} I_0)^2}$$

- V této aproximaci má Fokkerova-Planckova rovnice tvar:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \alpha'} \frac{\gamma}{2} \left[\Pi - S I \right] \alpha' P - \frac{\partial}{\partial \alpha'^*} \frac{\gamma}{2} \left[\Pi - S I \right] \alpha'^* P + \frac{\partial^2}{\partial \alpha' \partial \alpha'^*} \left(\gamma \bar{n} + \frac{\mathcal{K} R_2}{\gamma} \right) P.$$

F-P rovnice pro jednomódový laser jako rovnice pro VdP oscilátor

- Ve F-P rovnici s linearizovaným driftovým členem

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \alpha'}\frac{\gamma}{2}\left[\Pi - SI\right]\alpha' P - \frac{\partial}{\partial \alpha'^*}\frac{\gamma}{2}\left[\Pi - SI\right]\alpha'^* P + \frac{\partial^2}{\partial \alpha' \partial \alpha'^*}\left(\gamma \bar{n} + \frac{\mathcal{K} R_2}{\gamma}\right) P.$$

zavedeme nové bezrozměrné parametry $\tau = t/T$ a $\beta = \alpha'/\xi$ a g (par. buzení)

$$T = \frac{1}{\gamma}\left\{\frac{\mathcal{K}}{8\Gamma_2}\left(\frac{\mathcal{K}R_2}{\gamma\Gamma_2}\right)\left[\bar{n} + \frac{\mathcal{K}R_2}{\gamma\Gamma_2}\right]\right\}^{-1/2}, \xi^2 = \left\{\frac{\bar{n} + \left(\mathcal{K}R_2/\gamma\Gamma_2\right)}{\left(2\mathcal{K}/\Gamma_2\right)\left(\mathcal{K}R_2/\gamma\Gamma_2\right)}\right\}^{1/2}, g = \Gamma\left(\frac{\mathcal{K}R_2}{2\Gamma_2} - \frac{\gamma}{2}\right)$$

F-P rovnice pro jednomódový laser jako rovnice pro VdP oscilátor

- Ve F-P rovnici s linearizovaným driftovým členem

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \alpha'} \frac{\gamma}{2} [\Pi - SI]\, \alpha' P - \frac{\partial}{\partial \alpha'^*} \frac{\gamma}{2} [\Pi - SI]\, \alpha'^* P + \frac{\partial^2}{\partial \alpha' \partial \alpha'^*} \left(\gamma \bar{n} + \frac{\mathcal{K} R_2}{\gamma} \right) P.$$

zavedeme nové bezrozměrné parametry $\tau = t/T$ a $\beta = \alpha'/\xi$ a g (par. buzení)

$$T = \frac{1}{\gamma} \left\{ \frac{\mathcal{K}}{8\Gamma_2} \left(\frac{\mathcal{K} R_2}{\gamma \Gamma_2} \right) \left[\bar{n} + \frac{\mathcal{K} R_2}{\gamma \Gamma_2} \right] \right\}^{-1/2},\ \xi^2 = \left\{ \frac{\bar{n} + (\mathcal{K} R_2/\gamma \Gamma_2)}{(2\mathcal{K}/\Gamma_2)(\mathcal{K} R_2/\gamma \Gamma_2)} \right\}^{1/2},\ g = \Gamma \left(\frac{\mathcal{K} R_2}{2\Gamma_2} - \frac{\gamma}{2} \right)$$

- Potom lze F-P rovnici zapsat ve tvaru:

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = \left\{ -\frac{\partial}{\partial \beta} [g - |\beta|^2] \beta - \frac{\partial}{\partial \beta^\star} [g - |\beta|^2]\, \beta^\star + 4 \frac{\partial^2}{\partial \beta\, \partial \beta^\star} \right\} P$$

$\Rightarrow$ F-P rovnice pro Van der Polův oscilátor

Van der Polův oscilátor

- Fokkerova-Planckova rovnice pro jednomódový laserový generátor:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \left\{ -\frac{\partial}{\partial \beta}[g - |\beta|^2]\beta - \frac{\partial}{\partial \beta^\star}[g - |\beta|^2]\,\beta^\star + 4\frac{\partial^2}{\partial \beta\, \partial \beta^\star} \right\} P$$

Van der Polův oscilátor

- Fokkerova-Planckova rovnice pro jednomódový laserový generátor:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \left\{ -\frac{\partial}{\partial\,\beta}[g - |\beta|^2]\beta - \frac{\partial}{\partial\,\beta^\star}[g - |\beta|^2]\,\beta^\star + 4\frac{\partial^2}{\partial\,\beta\,\partial\,\beta^\star} \right\} P$$

Van der Polův oscilátor

- Fokkerova-Planckova rovnice pro jednomódový laserový generátor:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \left\{ -\frac{\partial}{\partial \beta}[g - |\beta|^2]\beta - \frac{\partial}{\partial \beta^\star}[g - |\beta|^2]\,\beta^\star + 4\frac{\partial^2}{\partial \beta\,\partial \beta^\star} \right\} P$$

Van der Polův oscilátor

- Fokkerova-Planckova rovnice pro jednomódový laserový generátor:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \left\{ -\frac{\partial}{\partial\,\beta}[g - |\beta|^2]\beta - \frac{\partial}{\partial\,\beta^\star}[g - |\beta|^2]\,\beta^\star + 4\frac{\partial^2}{\partial\,\beta\,\partial\,\beta^\star} \right\} P$$

- 1920 – B. van der Pol a I. van der Marek – matematický model elektronického obvodu simulujícího srdeční arytmie

$$y'' + \mu(y^2 - 1)y' + y = 0$$

Van der Polův oscilátor

- Fokkerova-Planckova rovnice pro jednomódový laserový generátor:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \left\{ -\frac{\partial}{\partial \beta}[g - |\beta|^2]\beta - \frac{\partial}{\partial \beta^\star}[g - |\beta|^2]\,\beta^\star + 4\frac{\partial^2}{\partial \beta \partial \beta^\star} \right\} P$$

- 1920 – B. van der Pol a I. van der Marek – matematický model elektronického obvodu simulujícího srdeční arytmie

$$y'' + \mu(y^2 - 1)y' + y = 0$$

- Nelineární diferenciální rovnic druhého řádu

Van der Polův oscilátor

- Fokkerova-Planckova rovnice pro jednomódový laserový generátor:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \left\{ -\frac{\partial}{\partial \beta}[g - |\beta|^2]\beta - \frac{\partial}{\partial \beta^\star}[g - |\beta|^2]\,\beta^\star + 4\frac{\partial^2}{\partial \beta\,\partial \beta^\star} \right\} P$$

- 1920 – B. van der Pol a I. van der Marek – matematický model elektronického obvodu simulujícího srdeční arytmie

$$y'' + \mu(y^2 - 1)y' + y = 0$$

- Nelineární diferenciální rovnic druhého řádu
- Řešení je citlivé na počáteční podmínky

Van der Polův oscilátor

- Fokkerova-Planckova rovnice pro jednomódový laserový generátor:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \left\{ -\frac{\partial}{\partial \beta}[g - |\beta|^2]\beta - \frac{\partial}{\partial \beta^\star}[g - |\beta|^2]\,\beta^\star + 4\frac{\partial^2}{\partial \beta \partial \beta^\star} \right\} P$$

- 1920 – B. van der Pol a I. van der Marek – matematický model elektronického obvodu simulujícího srdeční arytmie

$$y'' + \mu(y^2 - 1)y' + y = 0$$

- Nelineární diferenciální rovnic druhého řádu
- Řešení je citlivé na počáteční podmínky
- Historicky první matematický model dějů, označovaných jako deterministický chaos

Van der Polův oscilátor

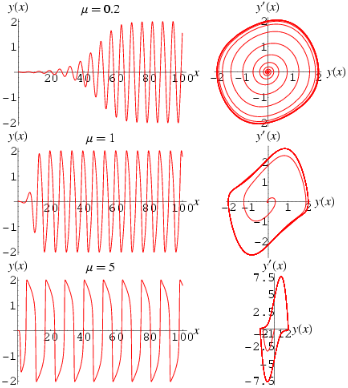
- Fokkerova-Planckova rovnice pro jednomódový laserový generátor:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \left\{ -\frac{\partial}{\partial \beta}[g - |\beta|^2]\beta - \frac{\partial}{\partial \beta^\star}[g - |\beta|^2]\,\beta^\star + 4\frac{\partial^2}{\partial \beta \,\partial \beta^\star} \right\} P$$

- 1920 – B. van der Pol a I. van der Marek – matematický model elektronického obvodu simulujícího srdeční arytmie

$$y'' + \mu(y^2 - 1)y' + y = 0$$

- Nelineární diferenciální rovnic druhého řádu
- Řešení je citlivé na počáteční podmínky
- Historicky první matematický model dějů, označovaných jako deterministický chaos



Řešení F-P rovnice pro jednomódový laser

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \left\{ -\frac{\partial}{\partial \beta}[g - |\beta|^2]\beta - \frac{\partial}{\partial \beta^\star}[g - |\beta|^2]\,\beta^\star + 4\frac{\partial^2}{\partial \beta\,\partial \beta^\star} \right\} P$$

- Přechod k polárním souřadnicím r, φ:

$$\boxed{\beta = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, \quad d\beta = r\,dr\,d\varphi}$$

Řešení F-P rovnice pro jednomódový laser

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \left\{ -\frac{\partial}{\partial\,\beta}[g - |\beta|^2]\beta - \frac{\partial}{\partial\,\beta^\star}[g - |\beta|^2]\,\beta^\star + 4\frac{\partial^2}{\partial\,\beta\,\partial\,\beta^\star} \right\} P$$

- Přechod k polárním souřadnicím r, φ:

$$\boxed{\beta = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, \quad d\beta = r\,dr\,d\varphi}$$

- Záměna proměnných:

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\beta = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial r}r + 1 - \frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right],$$

$$\frac{\partial}{\partial\,\beta^\star}\,\beta^\star = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial r}r + 1 + \frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right],$$

$$4\frac{\partial^2}{\partial\beta\partial\,\beta^\star} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

F-P rovnice pro jednomódový laser v polárních souřadnicích

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[(g - r^2)r^2 p\right]$$

- Hledáme stacionární řešení, nezávislé na φ:

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$$

F-P rovnice pro jednomódový laser v polárních souřadnicích

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[(g - r^2)r^2 p\right]$$

- Hledáme stacionární řešení, nezávislé na φ:

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$$

- Dostaneme:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r\frac{\partial p}{\partial r} - (g - r^2)r^2 p\right\} = 0$$

F-P rovnice pro jednomódový laser v polárních souřadnicích

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[(g - r^2)r^2 p\right]$$

- Hledáme stacionární řešení, nezávislé na φ:

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$$

- Dostaneme:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r\frac{\partial p}{\partial r} - (g - r^2)r^2 p\right\} = 0$$

- Integrujeme $2\times\ldots$

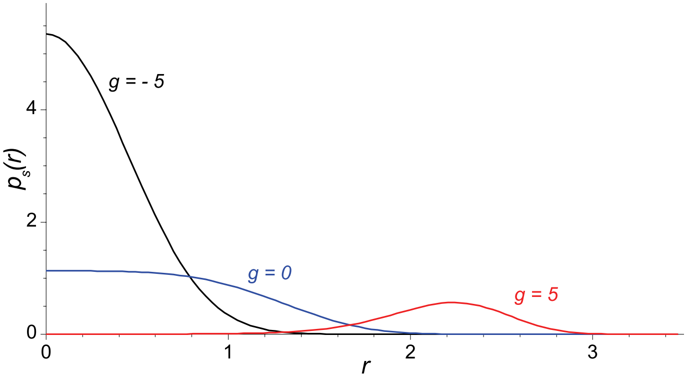
Stacionární řešení F-P rovnice pro jednomódový laser

- Normalizované stacionární řešení:

$$p_s(r) = \frac{\exp\left[-\left(r^2 - g\right)^2/4\right]}{\int_{-g/2}^{\infty} \exp\left[-x^2\right] dx}$$

- Normalizované stacionární řešení:

$$p_s(r) = \frac{\exp\left[-(r^2 - g)^2/4\right]}{\int_{-g/2}^{\infty} \exp\left[-x^2\right] dx}$$



Stacionární řešení F-P rovnice pro jednomódový laser

- S využitím fotodetekční rovnice je možné na základě distribuční funkce najít příslušné pravděpodobnostní rozdělení počtu fotonů pro jednomódový laser $p(n)$ – fotopulzní statistika laseru:

$$p(n) = \mathcal{N} \int_0^\infty \frac{w^{n+1}}{n!} \exp\left[-(w-g)^2/4 - w\right] dw,$$

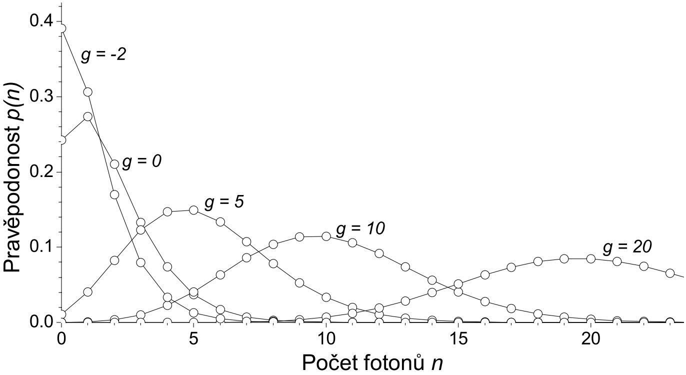
kde $\mathcal{N}$ je normovací konstanta volená tak, aby platilo $\sum_n p(n) = 1$.

Stacionární řešení F-P rovnice pro jednomódový laser

- S využitím fotodetekční rovnice je možné na základě distribuční funkce najít příslušné pravděpodobnostní rozdělení počtu fotonů pro jednomódový laser $p(n)$ – fotopulzní statistika laseru:

$$p(n) = \mathcal{N} \int_0^\infty \frac{w^{n+1}}{n!} \exp\left[-(w-g)^2/4 - w\right] dw,$$

kde $\mathcal{N}$ je normovací konstanta volená tak, aby platilo $\sum_n p(n) = 1$.



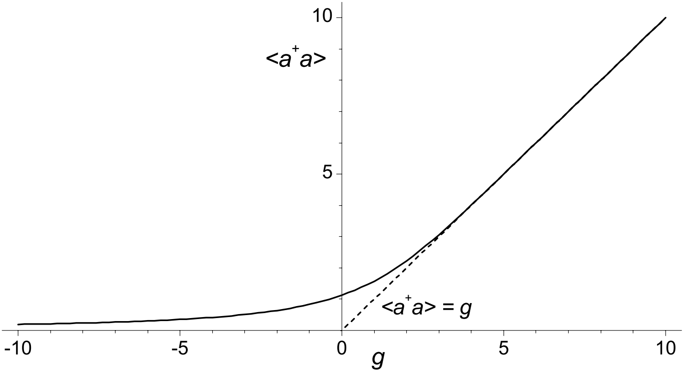
Stacionární řešení F-P rovnice pro jednomódový laser

- Střední hodnota počtu fotonů:

$$\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle = \int_0^\infty r^2 p_s(r) r dr = \frac{\int_{-g/2}^{\infty} (g + 2x) \exp\left[-x^2\right] dx}{\int_{-g/2}^{\infty} \exp\left[-x^2\right] dx}$$

- Střední hodnota počtu fotonů:

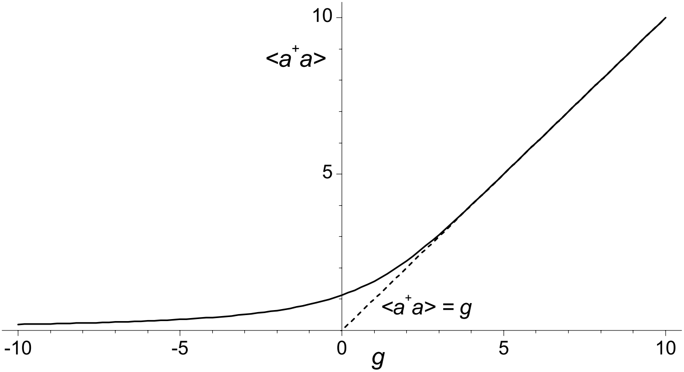
$$\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle = \int_0^\infty r^2 p_s(r) r dr = \frac{\int_{-g/2}^\infty (g+2x) \exp\left[-x^2\right] dx}{\int_{-g/2}^\infty \exp\left[-x^2\right] dx}$$



Stacionární řešení F-P rovnice pro jednomódový laser

- Střední hodnota počtu fotonů:

$$\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle = \int_0^\infty r^2 p_s(r) r dr = \frac{\int_{-g/2}^\infty (g + 2x) \exp\left[-x^2\right] dx}{\int_{-g/2}^\infty \exp\left[-x^2\right] dx}$$



- Pro $g \gg 0$ $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle \approx g$.

Literatura

- VRBOVÁ M., ŠULC J.: *Interakce rezonančního záření s látkou*, Skriptum FJFI ČVUT, Praha, 2006
- LOUISELL, W. H.: *Quantum statistical properties of radiation*, John Wiley & Sons, New York, 1973
- KVASIL, B.: *Teoretické základy kvantové elektroniky*, Academia, Praha, 1983
- VRBOVÁ M. a kol.: *Lasery a moderní optika - Oborová encyklopedie*, Prometheus, Praha, 1994
- VRBOVÁ M., JELÍNKOVÁ H., GAVRILOV P.: *Úvod do laserové techniky*, Skriptum FJFI ČVUT, Praha, 1994 http://space.fjfi.cvut.cz/web/sulc/ulat/
- Přednášky: http://space.fjfi.cvut.cz/web/sulc/FLA/