

# Fyzika laserů

## Kvantová teorie tlumení – řídicí rovnice

Jan Šulc

Katedra fyzikální elektroniky  
České vysoké učení technické  
jan.sulc@fjfi.cvut.cz

21. února 2017

Ing. Jan Šulc, Ph.D.

jan.sulc@fjfi.cvut.cz  
Trojanova, místnost 237  
Tel.: 224 358 672






Ing. Zbyněk Hubka

hubkazbynek@seznam.cz  
ELI Beamlines

1. Kvantová teorie tlumení, řídicí rovnice
2. Aplikace na „atom“, Pauliho rovnice

1. Kvantová teorie tlumení, řídicí rovnice
2. Aplikace na „atom“, Pauliho rovnice
3. Poloklasický popis interakce záření s látkou
4. Aplikace na šíření rezonančního záření prostředím
5. Aplikace na laser – kontinuální režim
6. Aplikace na laser – Q-spínání
7. Koherentní šíření impulzů
8. Další jevy v poloklasické aproximaci
9. Spektrum laseru a režim synchronizace módů

1. Kvantová teorie tlumení, řídicí rovnice
2. Aplikace na „atom“, Pauliho rovnice
3. Poloklasický popis interakce záření s látkou
4. Aplikace na šíření rezonančního záření prostředím
5. Aplikace na laser – kontinuální režim
6. Aplikace na laser – Q-spínání
7. Koherentní šíření impulzů
8. Další jevy v poloklasické aproximaci
9. Spektrum laseru a režim synchronizace módů
10. Kvantová teorie laseru, Fokkerova-Planckova rovnice
11. F-P rovnice pro záření a atom
12. F-P rovnice pro laser
13. Statistické vlastnosti laserového záření

-  VRBOVÁ M., ŠULC J.: *Interakce rezonančního záření s látkou*, Skriptum FJFI ČVUT, Praha, 2006
-  LOUISELL, W. H.: *Quantum statistical properties of radiation*, John Wiley & Sons, New York, 1973
-  VRBOVÁ M. a kol.: *Lasery a moderní optika - Oborová encyklopedie*, Prometheus, Praha, 1994
-  VRBOVÁ M., JELÍNKOVÁ H., GAVRILOV P.: *Úvod do laserové techniky*, Skriptum FJFI ČVUT, Praha, 1994 <http://people.fjfi.cvut.cz/sulcjan1/ulat/>
-  Přednášky: <http://people.fjfi.cvut.cz/sulcjan1/FLA/>

Laser Generátor optického záření specifických vlastností

Laser Generátor optického záření specifických vlastností

## 1. Monochromaticita



Laser Generátor optického záření specifických vlastností

1. Monochromaticnost
2. Směrovost (koncentrace energie)

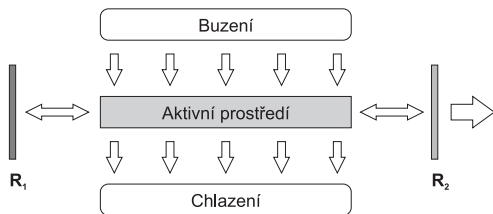
Laser Generátor optického záření specifických vlastností

1. Monochromaticnost
2. Směrnost (koncentrace energie)
3. Koherence

**Laser** Generátor optického záření specifických vlastností

1. Monochromaticita
2. Směrnost (koncentrace energie)
3. Koherence

## Schéma laseru

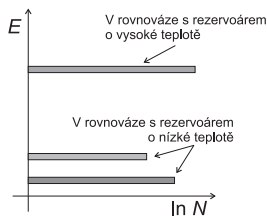
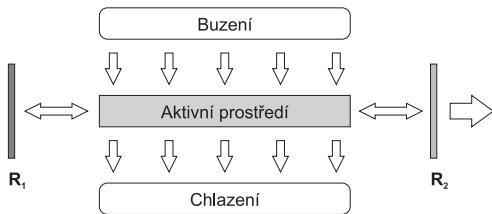


# Laserový generátor

**Laser** Generátor optického záření specifických vlastností

1. Monochromaticnost
2. Směrovost (koncentrace energie)
3. Koherence

## Schéma laseru



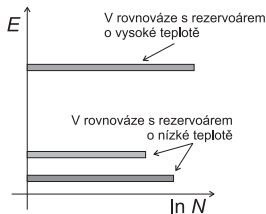
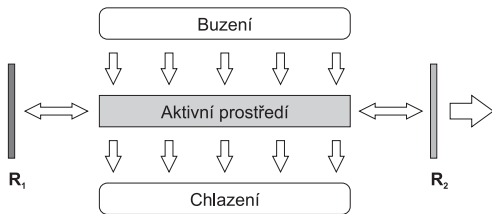
**Aktivní prostředí** Systém kvantových soustav, který si vyměňuje energii se záření prostřednictvím rezonanční interakce – **stimulovaná emise záření**

# Laserový generátor

**Laser** Generátor optického záření specifických vlastností

1. Monochromaticnost
2. Směrovost (koncentrace energie)
3. Koherence

## Schéma laseru



**Aktivní prostředí** Systém kvantových soustav, který si vyměňuje energii se záření prostřednictvím rezonanční interakce – **stimulovaná emise záření**

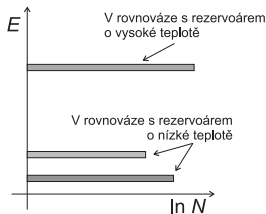
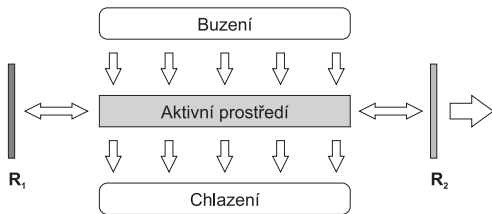
**Buzení a chlazení** Aktivní prostředí je udržováno v termodynamicky nerovnovážném stavu – **inverze populace hladin**

# Laserový generátor

**Laser** Generátor optického záření specifických vlastností

1. Monochromaticnost
2. Směrovost (koncentrace energie)
3. Koherence

## Schéma laseru



**Aktivní prostředí** Systém kvantových soustav, který si vyměňuje energii se záření prostřednictvím rezonanční interakce – **stimulovaná emise záření**

**Buzení a chlazení** Aktivní prostředí je udržováno v termodynamicky nerovnovážném stavu – **inverze populace hladin**

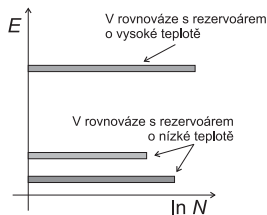
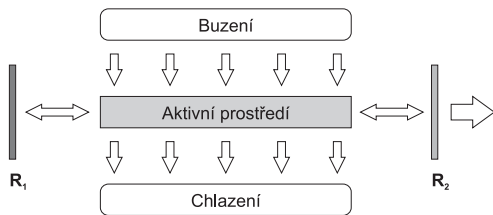
**Rezonátor** Zajišťuje zpětnou vazbu pro laserový zesilovač a vznik oscilací, využívá se k extrakci energie laseru

# Laserový generátor

**Laser** Generátor optického záření specifických vlastností

1. Monochromaticnost
2. Směrovost (koncentrace energie)
3. Koherence

## Schéma laseru



**Aktivní prostředí** Systém kvantových soustav, který si vyměňuje energii se záření prostřednictvím rezonanční interakce – **stimulovaná emise záření**

**Buzení a chlazení** Aktivní prostředí je udržováno v termodynamicky nerovnovážném stavu – **inverze populace hladin**

**Rezonátor** Zajišťuje zpětnou vazbu pro laserový zesilovač a vznik oscilací, využívá se k extrakci energie laseru

**Laser není v principu uzavřená soustava!**

- ▶ Pro popis interakce souboru kvantových soustav a elektromagnetického pole lze použít metody kvantové statistické fyziky.



- ▶ Pro popis interakce souboru kvantových soustav a elektromagnetického pole lze použít metody kvantové statistické fyziky.
- ▶ Výpočet střední hodnoty pozorovatelné veličiny:

$$\langle \hat{O} \rangle = \text{Tr} \{ \hat{\rho} \hat{O} \}$$

- ▶ Pro popis interakce souboru kvantových soustav a elektromagnetického pole lze použít metody kvantové statistické fyziky.
- ▶ Výpočet střední hodnoty pozorovatelné veličiny:

$$\langle \hat{O} \rangle = \text{Tr} \{ \hat{\rho} \hat{O} \}$$

- ▶ Kvantový *Liouvilleův teorém* – vývoj statistického operátoru  $\hat{\rho}$

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = [\hat{H}_T, \hat{\rho}]$$

- ▶ Pro popis interakce souboru kvantových soustav a elektromagnetického pole lze použít metody kvantové statistické fyziky.
- ▶ Výpočet střední hodnoty pozorovatelné veličiny:

$$\langle \hat{O} \rangle = \text{Tr} \{ \hat{\rho} \hat{O} \}$$

- ▶ Kvantový *Liouvilleův teorém* – vývoj statistického operátoru  $\hat{\rho}$

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = [\hat{H}_T, \hat{\rho}]$$

- ▶ Ekvivalentní časové Schrödingerově rovnici

- ▶ Pro popis interakce souboru kvantových soustav a elektromagnetického pole lze použít metody kvantové statistické fyziky.
- ▶ Výpočet střední hodnoty pozorovatelné veličiny:

$$\langle \hat{O} \rangle = \text{Tr} \{ \hat{\rho} \hat{O} \}$$

- ▶ Kvantový *Liouvilleův teorém* – vývoj statistického operátoru  $\hat{\rho}$

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = [\hat{H}_T, \hat{\rho}]$$

- ▶ Ekvivalentní časové Schrödingerově rovnici
- ▶ Musíme znát Hamiltonián celého uzavřeného systému  $\hat{H}_T$

- ▶ Pro popis interakce souboru kvantových soustav a elektromagnetického pole lze použít metody kvantové statistické fyziky.
- ▶ Výpočet střední hodnoty pozorovatelné veličiny:

$$\langle \hat{O} \rangle = \text{Tr} \{ \hat{\rho} \hat{O} \}$$

- ▶ Kvantový *Liouvilleův teorém* – vývoj statistického operátoru  $\hat{\rho}$

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = [\hat{H}_T, \hat{\rho}]$$

- ▶ Ekvivalentní časové Schrödingerově rovnici
- ▶ Musíme znát Hamiltonián celého uzavřeného systému  $\hat{H}_T$
- ▶ **Platí pouze pro uzavřený systém**

- ▶ Pro popis interakce souboru kvantových soustav a elektromagnetického pole lze použít metody kvantové statistické fyziky.
- ▶ Výpočet střední hodnoty pozorovatelné veličiny:

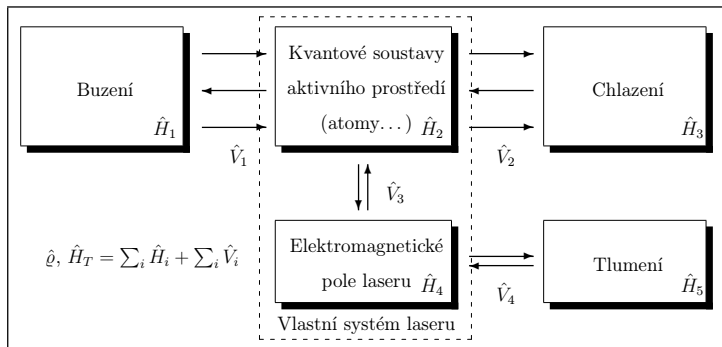
$$\langle \hat{O} \rangle = \text{Tr} \{ \hat{\rho} \hat{O} \}$$

- ▶ Kvantový *Liouvilleův teorém* – vývoj statistického operátoru  $\hat{\rho}$

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = [\hat{H}_T, \hat{\rho}]$$

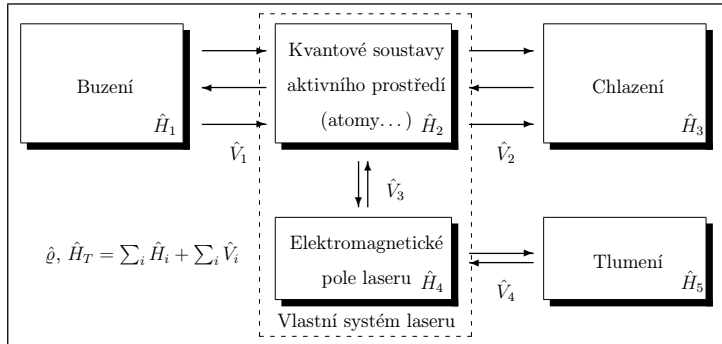
- ▶ Ekvivalentní časové Schrödingerově rovnici
- ▶ Musíme znát Hamiltonián celého uzavřeného systému  $\hat{H}_T$
- ▶ **Platí pouze pro uzavřený systém**
- ▶ Žádná část světa však není uzavřená a Liouvilleův teorém je jen exaktním obecným pravidlem.

# Model laseru jako uzavřený systém



**Buzení, chlazení a tlumení** termodynamicky rovnovážné systémy, makroskopické vlastnosti se nemění a závisí pouze na termodynamické teplotě T.

# Model laseru jako uzavřený systém

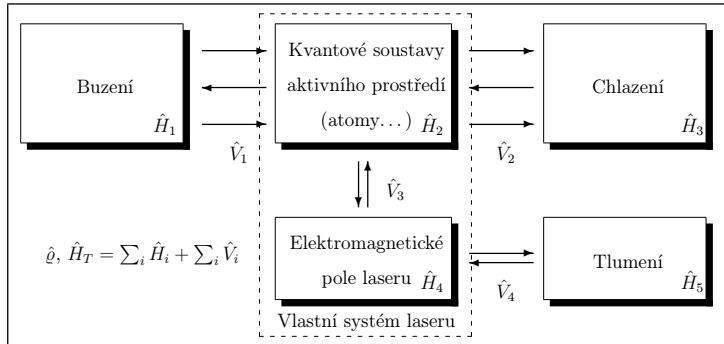


**Buzení, chlazení a tlumení** termodynamicky rovnovážné systémy, makroskopické vlastnosti se nemění a závisí pouze na termodynamické teplotě T.

**1 mód pole laseru** 1 stupeň volnosti



# Model laseru jako uzavřený systém

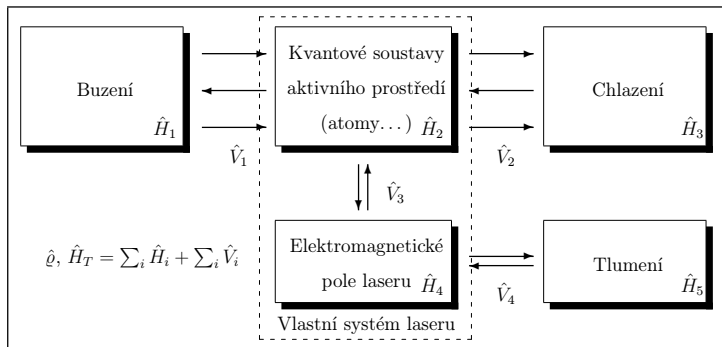


Buzení, chlazení a tlumení termodynamicky rovnovážné systémy, makroskopické vlastnosti se nemění a závisí pouze na termodynamické teplotě T.

1 mód pole laseru 1 stupeň volnosti

Aktivní prostředí konečný počet kvantových soustav a stupňů volnosti

# Model laseru jako uzavřený systém



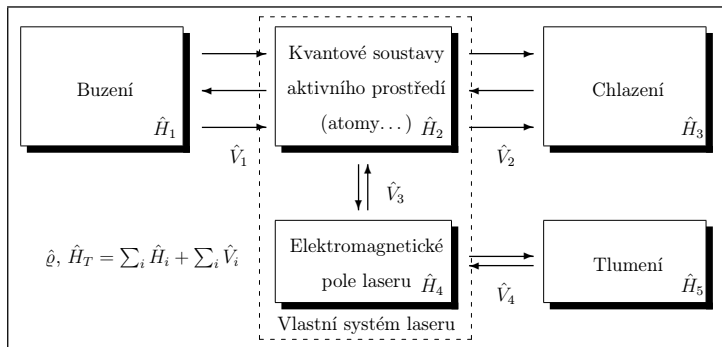
**Buzení, chlazení a tlumení** termodynamicky rovnovážné systémy, makroskopické vlastnosti se nemění a závisí pouze na termodynamické teplotě  $T$ .

**1 mód pole laseru** 1 stupeň volnosti

**Aktivní prostředí** konečný počet kvantových soustav a stupňů volnosti

**Celé pole** nekonečně, ale spočetně stupňů volnosti

# Model laseru jako uzavřený systém



**Buzení, chlazení a tlumení** termodynamicky rovnovážné systémy, makroskopické vlastnosti se nemění a závisí pouze na termodynamické teplotě  $T$ .

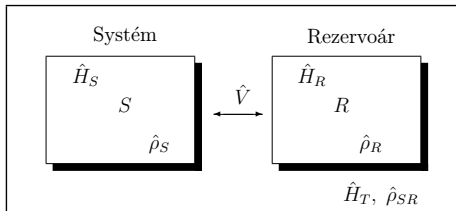
**1 mód pole laseru** 1 stupeň volnosti

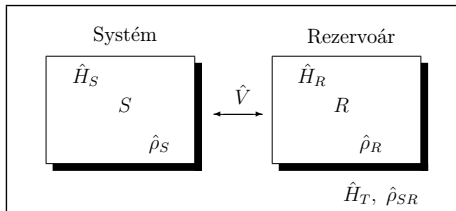
**Aktivní prostředí** konečný počet kvantových soustav a stupňů volnosti

**Celé pole** nekonečně, ale spočetně stupňů volnosti

**Rezervoár** nekonečně, ale spočetně stupňů volnosti (černé těleso)

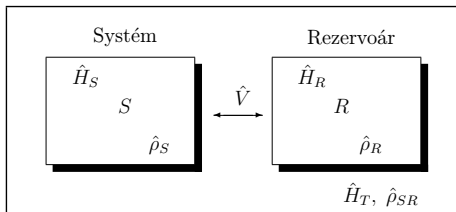
# Tlumený kvantový systém





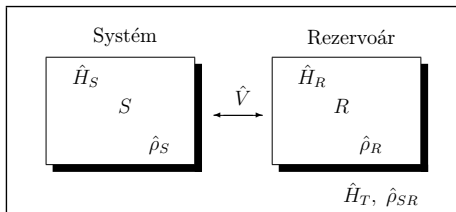
- ▶ Uzavřený složený kvantový systém:  $\hat{H}_T = \hat{H}_S + \hat{H}_R + \hat{V}$

# Tlumený kvantový systém

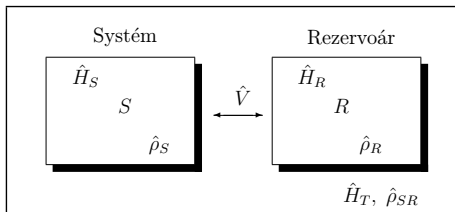


- ▶ Uzavřený složený kvantový systém:  $\hat{H}_T = \hat{H}_S + \hat{H}_R + \hat{V}$
- ▶ Systém (dynamická soustava) – konečný počet stupňů volnosti

# Tlumený kvantový systém



- ▶ Uzavřený složený kvantový systém:  $\hat{H}_T = \hat{H}_S + \hat{H}_R + \hat{V}$
- ▶ Systém (dynamická soustava) – konečný počet stupňů volnosti
- ▶ Rezervoár (tlumící soustava) – nekonečně spočetně stupňů volnosti



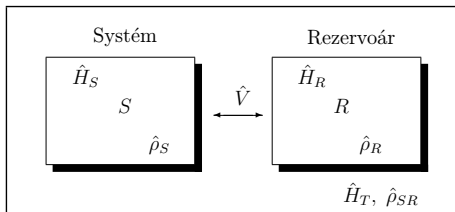
- ▶ Uzavřený složený kvantový systém:  $\hat{H}_T = \hat{H}_S + \hat{H}_R + \hat{V}$
- ▶ Systém (dynamická soustava) – konečný počet stupňů volnosti
- ▶ Rezervoár (tlumící soustava) – nekonečně spočetně stupňů volnosti
- ▶ Evoluce celého uzavřeného systému – Liouvillova rovnice v **interakční reprezentaci**

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}_{SR}^I}{\partial t} = [\hat{V}^I(t - t_0), \hat{\rho}_{SR}^I]$$

$$\hat{\rho}_{SR}^I(t) = \hat{U}_0^\dagger(t, t_0) \hat{\rho}_{SR}^S(t) \hat{U}_0(t, t_0), \quad \hat{V}^I(t - t_0) = \hat{U}_0^\dagger(t, t_0) \hat{V}^S \hat{U}_0(t, t_0).$$

$$\hat{U}_0(t, t_0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0^S(t - t_0)\right)$$





- ▶ Uzavřený složený kvantový systém:  $\hat{H}_T = \hat{H}_S + \hat{H}_R + \hat{V}$
- ▶ Systém (dynamická soustava) – konečný počet stupňů volnosti
- ▶ Rezervoár (tlumící soustava) – nekonečně spočetně stupňů volnosti
- ▶ Evoluce celého uzavřeného systému – Liouvillova rovnice v **interakční reprezentaci**

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}_{SR}^I}{\partial t} = [\hat{V}^I(t - t_0), \hat{\rho}_{SR}^I]$$

$$\hat{\rho}_{SR}^I(t) = \hat{U}_0^\dagger(t, t_0) \hat{\rho}_{SR}^S(t) \hat{U}_0(t, t_0), \quad \hat{V}^I(t - t_0) = \hat{U}_0^\dagger(t, t_0) \hat{V}^S \hat{U}_0(t, t_0).$$

$$\hat{U}_0(t, t_0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0^S(t - t_0)\right)$$

- ▶ Řešení nestacionární poruchovou iterační metodou + řada zjednodušujících předpokladů

Výchozí rovnice: Liouvillova rovnice v **interakční reprezentaci**

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}'_{SR}}{\partial t} = [\hat{V}'(t - t_0), \hat{\rho}'_{SR}]$$

Výchozí rovnice: Liouvillova rovnice v **interakční reprezentaci**

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}'_{SR}}{\partial t} = [\hat{V}'(t - t_0), \hat{\rho}'_{SR}]$$

Aproximace řešení: postupná integrace, na pravé straně je předchozí iterace  $\hat{\rho}'_{SR}$

$$\begin{aligned} \hat{\rho}'_{SR}(t) - \hat{\rho}'_{SR}(t_0) &= \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 [\hat{V}'(t_1 - t_0), \hat{\rho}'_{SR}(t_0)] + \\ &+ \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 [\hat{V}'(t_1 - t_0), [\hat{V}'(t_2 - t_0), \hat{\rho}'_{SR}(t_0)]] \end{aligned}$$

Výchozí rovnice: Liouvillova rovnice v **interakční reprezentaci**

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}_{SR}^I}{\partial t} = [\hat{V}^I(t - t_0), \hat{\rho}_{SR}^I]$$

Aproximace řešení: postupná integrace, na pravé straně je předchozí iterace  $\hat{\rho}_{SR}^I$

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{SR}^I(t) - \hat{\rho}_{SR}^I(t_0) &= \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 [\hat{V}^I(t_1 - t_0), \hat{\rho}_{SR}^I(t_0)] + \\ &+ \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 [\hat{V}^I(t_1 - t_0), [\hat{V}^I(t_2 - t_0), \hat{\rho}_{SR}^I(t_0)]] \end{aligned}$$

Počáteční podmínka: pro  $t = t_0$  bude  $\hat{V} \equiv 0$  a  $\hat{\rho}_{SR}^I(t_0) = \hat{\rho}_S^S \hat{\rho}_R^S = \hat{\rho}_S^I(t_0) \hat{\rho}_R$

Výchozí rovnice: Liouvillova rovnice v **interakční reprezentaci**

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}_{SR}^I}{\partial t} = [\hat{V}^I(t - t_0), \hat{\rho}_{SR}^I]$$

Aproximace řešení: postupná integrace, na pravé straně je předchozí iterace  $\hat{\rho}_{SR}^I$

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{SR}^I(t) - \hat{\rho}_{SR}^I(t_0) &= \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 [\hat{V}^I(t_1 - t_0), \hat{\rho}_{SR}^I(t_0)] + \\ &+ \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 [\hat{V}^I(t_1 - t_0), [\hat{V}^I(t_2 - t_0), \hat{\rho}_{SR}^I(t_0)]] \end{aligned}$$

Počáteční podmínka: pro  $t = t_0$  bude  $\hat{V} \equiv 0$  a  $\hat{\rho}_{SR}^I(t_0) = \hat{\rho}_S^S \hat{\rho}_R^S = \hat{\rho}_S^I(t_0) \hat{\rho}_R$

Rezervoár v term. rovnováze:  $\hat{\rho}_R^S = \hat{\rho}_R^I \equiv \hat{\rho}_R$  se v čase nemění

$$\hat{\rho}_R = \frac{e^{-\beta \hat{H}_R}}{\text{Tr}_R \{e^{-\beta \hat{H}_R}\}}, \quad \beta = \frac{1}{kT}$$

- ▶ Máme rovnici pro  $\hat{\varrho}'_{SR}(t)$ , tedy vývoj celé složené soustavy. Nás ale zajímá především vývoj systému  $S$ , respektive jeho dynamických proměnných:

$$\langle \hat{M} \rangle = \text{Tr}_{SR} \left\{ \hat{\varrho}_{SR}^S \hat{M} \right\} = \text{Tr}_S \left\{ \underbrace{\text{Tr}_R(\hat{\varrho}_{SR}^S)}_{\hat{\varrho}_S^S} \hat{M} \right\} = \text{Tr}_S \left\{ \hat{\varrho}_S^S \hat{M} \right\}$$

- ▶ Máme rovnici pro  $\hat{\varrho}'_{SR}(t)$ , tedy vývoj celé složené soustavy. Nás ale zajímá především vývoj systému  $S$ , respektive jeho dynamických proměnných:

$$\langle \hat{M} \rangle = \text{Tr}_{SR} \left\{ \hat{\varrho}'_{SR} \hat{M} \right\} = \text{Tr}_S \left\{ \underbrace{\text{Tr}_R(\hat{\varrho}'_{SR})}_{\hat{\varrho}'_S} \hat{M} \right\} = \text{Tr}_S \left\{ \hat{\varrho}'_S \hat{M} \right\}$$

- ▶ Redukovaný statistický operátor

$$\hat{\varrho}'_S = \text{Tr}_R \hat{\varrho}'_{SR} = \text{Tr}_R \left( e^{-(i/\hbar)(\hat{H}_R + \hat{H}_S)(t-t_0)} \hat{\varrho}'_{SR}(t) e^{(i/\hbar)(\hat{H}_R + \hat{H}_S)(t-t_0)} \right)$$

- ▶ Máme rovnici pro  $\hat{\varrho}'_{SR}(t)$ , tedy vývoj celé složené soustavy. Nás ale zajímá především vývoj systému  $S$ , respektive jeho dynamických proměnných:

$$\langle \hat{M} \rangle = \text{Tr}_{SR} \left\{ \hat{\varrho}'_{SR} \hat{M} \right\} = \text{Tr}_S \left\{ \underbrace{\text{Tr}_R(\hat{\varrho}'_{SR})}_{\hat{\varrho}'_S} \hat{M} \right\} = \text{Tr}_S \left\{ \hat{\varrho}'_S \hat{M} \right\}$$

- ▶ Redukovaný statistický operátor

$$\hat{\varrho}'_S = \text{Tr}_R \hat{\varrho}'_{SR} = \text{Tr}_R \left( e^{-(i/\hbar)(\hat{H}_R + \hat{H}_S)(t-t_0)} \hat{\varrho}'_{SR}(t) e^{(i/\hbar)(\hat{H}_R + \hat{H}_S)(t-t_0)} \right)$$



- ▶ Máme rovnici pro  $\hat{\rho}'_{SR}(t)$ , tedy vývoj celé složené soustavy. Nás ale zajímá především vývoj systému  $S$ , respektive jeho dynamických proměnných:

$$\langle \hat{M} \rangle = \text{Tr}_{SR} \left\{ \hat{\rho}_{SR}^S \hat{M} \right\} = \text{Tr}_S \left\{ \underbrace{\text{Tr}_R(\hat{\rho}_{SR}^S)}_{\hat{\rho}_S^S} \hat{M} \right\} = \text{Tr}_S \left\{ \hat{\rho}_S^S \hat{M} \right\}$$

- ▶ Redukovaný statistický operátor

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_S^S &= \text{Tr}_R \hat{\rho}_{SR}^S = \text{Tr}_R \left( e^{-(i/\hbar)(\hat{H}_R + \hat{H}_S)(t-t_0)} \hat{\rho}'_{SR}(t) e^{(i/\hbar)(\hat{H}_R + \hat{H}_S)(t-t_0)} \right) \\ &= e^{-(i/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)} \underbrace{\text{Tr}_R \hat{\rho}'_{SR}(t)}_{\hat{\rho}'_S} e^{(i/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)} \end{aligned}$$

- ▶ Máme rovnici pro  $\hat{\rho}'_{SR}(t)$ , tedy vývoj celé složené soustavy. Nás ale zajímá především vývoj systému  $S$ , respektive jeho dynamických proměnných:

$$\langle \hat{M} \rangle = \text{Tr}_{SR} \left\{ \hat{\rho}_{SR}^S \hat{M} \right\} = \text{Tr}_S \left\{ \underbrace{\text{Tr}_R(\hat{\rho}_{SR}^S)}_{\hat{\rho}_S^S} \hat{M} \right\} = \text{Tr}_S \left\{ \hat{\rho}_S^S \hat{M} \right\}$$

- ▶ Redukovaný statistický operátor

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_S^S &= \text{Tr}_R \hat{\rho}_{SR}^S = \text{Tr}_R \left( e^{-(i/\hbar)(\hat{H}_R + \hat{H}_S)(t-t_0)} \hat{\rho}'_{SR}(t) e^{(i/\hbar)(\hat{H}_R + \hat{H}_S)(t-t_0)} \right) \\ &= e^{-(i/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)} \underbrace{\text{Tr}_R \hat{\rho}'_{SR}(t)}_{\hat{\rho}'_S} e^{(i/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)} \\ \hat{\rho}'_S &= e^{(i/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)} \hat{\rho}_S^S(t) e^{-(i/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)} \end{aligned}$$

- ▶ Máme rovnici pro  $\hat{\varrho}'_{SR}(t)$ , tedy vývoj celé složené soustavy. Nás ale zajímá především vývoj systému  $S$ , respektive jeho dynamických proměnných:

$$\langle \hat{M} \rangle = \text{Tr}_{SR} \left\{ \hat{\varrho}'_{SR} \hat{M} \right\} = \text{Tr}_S \left\{ \underbrace{\text{Tr}_R(\hat{\varrho}'_{SR})}_{\hat{\varrho}'_S} \hat{M} \right\} = \text{Tr}_S \left\{ \hat{\varrho}'_S \hat{M} \right\}$$

- ▶ Redukovaný statistický operátor

$$\begin{aligned} \hat{\varrho}'_S &= \text{Tr}_R \hat{\varrho}'_{SR} = \text{Tr}_R \left( e^{-(i/\hbar)(\hat{H}_R + \hat{H}_S)(t-t_0)} \hat{\varrho}'_{SR}(t) e^{(i/\hbar)(\hat{H}_R + \hat{H}_S)(t-t_0)} \right) \\ &= e^{-(i/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)} \underbrace{\text{Tr}_R \hat{\varrho}'_{SR}(t)}_{\hat{\varrho}'_S} e^{(i/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)} \\ \hat{\varrho}'_S &= e^{(i/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)} \hat{\varrho}'_S(t) e^{-(i/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)} \end{aligned}$$

- ▶ Výpočet střední hodnoty:

$$\langle \hat{M} \rangle = \text{Tr} \left\{ \hat{\varrho}'_S \hat{M}^S \right\} = \text{Tr} \left\{ e^{-(i/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)} \hat{\varrho}'_S e^{(i/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)} \hat{M}^S \right\}$$

- ▶ Máme rovnici pro  $\hat{\rho}'_{SR}(t)$ , tedy vývoj celé složené soustavy. Nás ale zajímá především vývoj systému  $S$ , respektive jeho dynamických proměnných:

$$\langle \hat{M} \rangle = \text{Tr}_{SR} \left\{ \hat{\rho}'_{SR} \hat{M} \right\} = \text{Tr}_S \left\{ \underbrace{\text{Tr}_R(\hat{\rho}'_{SR})}_{\hat{\rho}'_S} \hat{M} \right\} = \text{Tr}_S \left\{ \hat{\rho}'_S \hat{M} \right\}$$

- ▶ Redukovaný statistický operátor

$$\begin{aligned} \hat{\rho}'_S &= \text{Tr}_R \hat{\rho}'_{SR} = \text{Tr}_R \left( e^{-(i/\hbar)(\hat{H}_R + \hat{H}_S)(t-t_0)} \hat{\rho}'_{SR}(t) e^{(i/\hbar)(\hat{H}_R + \hat{H}_S)(t-t_0)} \right) \\ &= e^{-(i/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)} \underbrace{\text{Tr}_R \hat{\rho}'_{SR}(t)}_{\hat{\rho}'_S} e^{(i/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)} \\ \hat{\rho}'_S &= e^{(i/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)} \hat{\rho}'_S(t) e^{-(i/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)} \end{aligned}$$

- ▶ Výpočet střední hodnoty:

$$\langle \hat{M} \rangle = \text{Tr} \left\{ \hat{\rho}'_S \hat{M}^S \right\} = \text{Tr} \left\{ e^{-(i/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)} \hat{\rho}'_S e^{(i/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)} \hat{M}^S \right\}$$

- Máme rovnici pro  $\hat{\rho}'_{SR}(t)$ , tedy vývoj celé složené soustavy. Nás ale zajímá především vývoj systému S, respektive jeho dynamických proměnných:

$$\langle \hat{M} \rangle = \text{Tr}_{SR} \left\{ \hat{\rho}'_{SR} \hat{M} \right\} = \text{Tr}_S \left\{ \underbrace{\text{Tr}_R(\hat{\rho}'_{SR})}_{\hat{\rho}'_S} \hat{M} \right\} = \text{Tr}_S \left\{ \hat{\rho}'_S \hat{M} \right\}$$

- Redukovaný statistický operátor

$$\begin{aligned} \hat{\rho}'_S &= \text{Tr}_R \hat{\rho}'_{SR} = \text{Tr}_R \left( e^{-(i/\hbar)(\hat{H}_R + \hat{H}_S)(t-t_0)} \hat{\rho}'_{SR}(t) e^{(i/\hbar)(\hat{H}_R + \hat{H}_S)(t-t_0)} \right) \\ &= e^{-(i/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)} \underbrace{\text{Tr}_R \hat{\rho}'_{SR}(t)}_{\hat{\rho}'_S} e^{(i/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)} \\ \hat{\rho}'_S &= e^{(i/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)} \hat{\rho}'_S(t) e^{-(i/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)} \end{aligned}$$

- Výpočet střední hodnoty:

$$\begin{aligned} \langle \hat{M} \rangle &= \text{Tr} \left\{ \hat{\rho}'_S \hat{M} \right\} = \text{Tr} \left\{ e^{-(i/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)} \hat{\rho}'_S e^{(i/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)} \hat{M} \right\} = \\ &= \text{Tr} \left\{ \hat{\rho}'_S \underbrace{e^{(i/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)} \hat{M} e^{-(i/\hbar)\hat{H}_S(t-t_0)}}_{\hat{M}'} \right\} = \text{Tr} \left\{ \hat{\rho}'_S \hat{M}' \right\} \end{aligned}$$

- ▶ Ve výchozí rovnici

$$\begin{aligned} \hat{\rho}'_{SR}(t) - \hat{\rho}'_{SR}(t_0) &= \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 \left[ \hat{V}'(t_1 - t_0), \hat{\rho}'_{SR}(t_0) \right] + \\ &+ \left( \frac{1}{i\hbar} \right)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \left[ \hat{V}'(t_1 - t_0), \left[ \hat{V}'(t_2 - t_0), \hat{\rho}'_{SR}(t_0) \right] \right] \end{aligned}$$

- ▶ Ve výchozí rovnici

$$\begin{aligned} \hat{\rho}'_{SR}(t) - \hat{\rho}'_{SR}(t_0) &= \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 [\hat{V}'(t_1 - t_0), \hat{\rho}'_{SR}(t_0)] + \\ &+ \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 [\hat{V}'(t_1 - t_0), [\hat{V}'(t_2 - t_0), \hat{\rho}'_{SR}(t_0)]] \end{aligned}$$

- ▶ Vypočteme stopu na pravé a levé straně přes rezervoár  $R$ :

$$\begin{aligned} \hat{\rho}'_S(t) - \hat{\rho}'_S(t_0) &= \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 \text{Tr}_R [\hat{V}'(t_1 - t_0), \hat{\rho}'_{SR}(t_0)] + \\ &+ \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \text{Tr}_R [\hat{V}'(t_1 - t_0), [\hat{V}'(t_2 - t_0), \hat{\rho}'_{SR}(t_0)]] \end{aligned}$$

- ▶ Ve výchozí rovnici

$$\begin{aligned} \hat{\rho}'_{SR}(t) - \hat{\rho}'_{SR}(t_0) &= \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 \left[ \hat{V}'(t_1 - t_0), \hat{\rho}'_{SR}(t_0) \right] + \\ &+ \left( \frac{1}{i\hbar} \right)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \left[ \hat{V}'(t_1 - t_0), \left[ \hat{V}'(t_2 - t_0), \hat{\rho}'_{SR}(t_0) \right] \right] \end{aligned}$$

- ▶ Vypočteme stopu na pravé a levé straně přes rezervoár  $R$ :

$$\begin{aligned} \hat{\rho}'_S(t) - \hat{\rho}'_S(t_0) &= \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 \text{Tr}_R \left[ \hat{V}'(t_1 - t_0), \hat{\rho}'_{SR}(t_0) \right] + \\ &+ \left( \frac{1}{i\hbar} \right)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \text{Tr}_R \left[ \hat{V}'(t_1 - t_0), \left[ \hat{V}'(t_2 - t_0), \hat{\rho}'_{SR}(t_0) \right] \right] \end{aligned}$$

- ▶ Počáteční podmínka  $\hat{\rho}'_{SR}(t_0) = \hat{\rho}'_S(t_0) \hat{\rho}_R$ . Tedy:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}'_S(t) - \hat{\rho}'_S(t_0) &= \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 \text{Tr}_R \left[ \hat{V}'(t_1 - t_0), \hat{\rho}'_S(t_0) \hat{\rho}_R \right] + \\ &+ \left( \frac{1}{i\hbar} \right)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \text{Tr}_R \left[ \hat{V}'(t_1 - t_0), \left[ \hat{V}'(t_2 - t_0), \hat{\rho}'_S(t_0) \hat{\rho}_R \right] \right] \end{aligned}$$



- ▶ Abychom mohli provést další zjednodušující úpravy, potřebujeme znát tvar interakčního Hamiltoniánu

- ▶ Abychom mohli provést další zjednodušující úpravy, potřebujeme znát tvar interakčního Hamiltoniánu
- ▶ Uvažujeme nejjednodušší tvar – první křížový člen Taylorova rozvoje celkového Hamiltoniánu soustavy  $\hat{H}_T$ , tedy:

$$\hat{V}(\hat{Q}_i, \hat{F}_i) = \hat{H}_T(\hat{Q}_i, \hat{F}_i) - \hat{H}_S(\hat{Q}_i) - \hat{H}_R(\hat{F}_i) \doteq \hbar \sum_i \hat{Q}_i \hat{F}_i,$$

$\hat{Q}_i$  – operátory systému,  $\hat{F}_i$  – operátory rezervoáru

- ▶ Abychom mohli provést další zjednodušující úpravy, potřebujeme znát tvar interakčního Hamiltoniánu
- ▶ Uvažujeme nejjednodušší tvar – první křížový člen Taylorova rozvoje celkového Hamiltoniánu soustavy  $\hat{H}_T$ , tedy:

$$\hat{V}(\hat{Q}_i, \hat{F}_i) = \hat{H}_T(\hat{Q}_i, \hat{F}_i) - \hat{H}_S(\hat{Q}_i) - \hat{H}_R(\hat{F}_i) \doteq \hbar \sum_i \hat{Q}_i \hat{F}_i,$$

$\hat{Q}_i$  – operátory systému,  $\hat{F}_i$  – operátory rezervoáru

- ▶ Vzhledem k nezávislosti stavových prostorů systému S a rezervoáru R dostaneme:

$$\hat{V}^l(t - t_0) = \hbar \sum_i \hat{Q}_i^l(t - t_0) \hat{F}_i^l(t - t_0)$$

- ▶ Abychom mohli provést další zjednodušující úpravy, potřebujeme znát tvar interakčního Hamiltoniánu
- ▶ Uvažujeme nejjednodušší tvar – první křížový člen Taylorova rozvoje celkového Hamiltoniánu soustavy  $\hat{H}_T$ , tedy:

$$\hat{V}(\hat{Q}_i, \hat{F}_i) = \hat{H}_T(\hat{Q}_i, \hat{F}_i) - \hat{H}_S(\hat{Q}_i) - \hat{H}_R(\hat{F}_i) \doteq \hbar \sum_i \hat{Q}_i \hat{F}_i,$$

$\hat{Q}_i$  – operátory systému,  $\hat{F}_i$  – operátory rezervoáru

- ▶ Vzhledem k nezávislosti stavových prostorů systému S a rezervoáru R dostaneme:

$$\hat{V}^l(t - t_0) = \hbar \sum_i \hat{Q}_i^l(t - t_0) \hat{F}_i^l(t - t_0)$$

- ▶ Zavedeme označení  $\hat{Q}_i^{1,2} = \hat{Q}_i^l(t_{1,2} - t_0)$  a  $\hat{F}_i^{1,2} = \hat{F}_i^l(t_{1,2} - t_0)$  a dosadíme do řídicí rovnice

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_S^l(t) - \hat{\rho}_S^l(t_0) &= \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 \text{Tr}_R \left[ \hat{V}^l(t_1 - t_0), \hat{\rho}_S^l(t_0) \hat{\rho}_R \right] + \\ &+ \left( \frac{1}{i\hbar} \right)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \text{Tr}_R \left[ \hat{V}^l(t_1 - t_0), \left[ \hat{V}^l(t_2 - t_0), \hat{\rho}_S^l(t_0) \hat{\rho}_R \right] \right] \end{aligned}$$

- ▶ Abychom mohli provést další zjednodušující úpravy, potřebujeme znát tvar interakčního Hamiltoniánu
- ▶ Uvažujeme nejjednodušší tvar – první křížový člen Taylorova rozvoje celkového Hamiltoniánu soustavy  $\hat{H}_T$ , tedy:

$$\hat{V}(\hat{Q}_i, \hat{F}_i) = \hat{H}_T(\hat{Q}_i, \hat{F}_i) - \hat{H}_S(\hat{Q}_i) - \hat{H}_R(\hat{F}_i) \doteq \hbar \sum_i \hat{Q}_i \hat{F}_i,$$

$\hat{Q}_i$  – operátory systému,  $\hat{F}_i$  – operátory rezervoáru

- ▶ Vzhledem k nezávislosti stavových prostorů systému S a rezervoáru R dostaneme:

$$\hat{V}^l(t - t_0) = \hbar \sum_i \hat{Q}_i^l(t - t_0) \hat{F}_i^l(t - t_0)$$

- ▶ Zavedeme označení  $\hat{Q}_i^{1,2} = \hat{Q}_i^l(t_{1,2} - t_0)$  a  $\hat{F}_i^{1,2} = \hat{F}_i^l(t_{1,2} - t_0)$  a dosadíme do řídicí rovnice

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_S^l(t) - \hat{\rho}_S^l(t_0) &= -i \sum_i \int_{t_0}^t dt_1 \text{Tr}_R \left[ \hat{Q}_i^1 \hat{F}_i^1, \hat{\rho}_S^l(t_0) \hat{\rho}_R \right] - \\ &- \sum_{i,j} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \text{Tr}_R \left[ \hat{Q}_i^1 \hat{F}_i^1, \left[ \hat{Q}_j^2 \hat{F}_j^2, \hat{\rho}_S^l(t_0) \hat{\rho}_R \right] \right] \end{aligned}$$

- ▶ V rovnici

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_S^l(t) - \hat{\rho}_S^l(t_0) &= -i \sum_i \int_{t_0}^t dt_1 \text{Tr}_R \left[ \hat{Q}_i^1 \hat{F}_i^1, \hat{\rho}_S^l(t_0) \hat{\rho}_R \right] - \\ &- \sum_{i,j} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \text{Tr}_R \left[ \hat{Q}_i^1 \hat{F}_i^1, \left[ \hat{Q}_j^2 \hat{F}_j^2, \hat{\rho}_S^l(t_0) \hat{\rho}_R \right] \right] \end{aligned}$$

- ▶ V rovnici

$$\begin{aligned} \hat{\rho}'_S(t) - \hat{\rho}'_S(t_0) &= -i \sum_i \int_{t_0}^t dt_1 \text{Tr}_R \left[ \hat{Q}_i^1 \hat{F}_i^1, \hat{\rho}'_S(t_0) \hat{\rho}'_R \right] - \\ &\quad - \sum_{i,j} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \text{Tr}_R \left[ \hat{Q}_i^1 \hat{F}_i^1, \left[ \hat{Q}_j^2 \hat{F}_j^2, \hat{\rho}'_S(t_0) \hat{\rho}'_R \right] \right] \end{aligned}$$

- ▶ můžeme vypočítat stopy (DC 1.1):

$$\begin{aligned} \text{Tr}_R \left[ \hat{Q}_i^1 \hat{F}_i^1, \hat{\rho}'_S(t_0) \hat{\rho}'_R \right] &= \left[ \hat{Q}_i^1, \hat{\rho}'_S(t_0) \right] \langle \hat{F}_i^1 \rangle_R \\ \text{Tr}_R \left[ \hat{Q}_i^1 \hat{F}_i^1, \left[ \hat{Q}_j^2 \hat{F}_j^2, \hat{\rho}'_S(t_0) \hat{\rho}'_R \right] \right] &= \\ &= \langle \hat{F}_i^1 \hat{F}_j^2 \rangle_R \left( \hat{Q}_i^1 \hat{Q}_j^2 \hat{\rho}'_S - \hat{Q}_j^2 \hat{\rho}'_S \hat{Q}_i^1 \right) - \langle \hat{F}_j^2 \hat{F}_i^1 \rangle_R \left( \hat{Q}_i^1 \hat{\rho}'_S \hat{Q}_j^2 - \hat{\rho}'_S \hat{Q}_j^2 \hat{Q}_i^1 \right) \end{aligned}$$

- ▶ V rovnici

$$\begin{aligned} \hat{\varrho}'_S(t) - \hat{\varrho}'_S(t_0) &= -i \sum_i \int_{t_0}^t dt_1 \text{Tr}_R \left[ \hat{Q}_i^1 \hat{F}_i^1, \hat{\varrho}'_S(t_0) \hat{\varrho}'_R \right] - \\ &\quad - \sum_{i,j} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \text{Tr}_R \left[ \hat{Q}_i^1 \hat{F}_i^1, \left[ \hat{Q}_j^2 \hat{F}_j^2, \hat{\varrho}'_S(t_0) \hat{\varrho}'_R \right] \right] \end{aligned}$$

- ▶ můžeme vypočítat stopy (DC 1.1):

$$\begin{aligned} \text{Tr}_R \left[ \hat{Q}_i^1 \hat{F}_i^1, \hat{\varrho}'_S(t_0) \hat{\varrho}'_R \right] &= \left[ \hat{Q}_i^1, \hat{\varrho}'_S(t_0) \right] \langle \hat{F}_i^1 \rangle_R \\ \text{Tr}_R \left[ \hat{Q}_i^1 \hat{F}_i^1, \left[ \hat{Q}_j^2 \hat{F}_j^2, \hat{\varrho}'_S(t_0) \hat{\varrho}'_R \right] \right] &= \\ &= \langle \hat{F}_i^1 \hat{F}_j^2 \rangle_R \left( \hat{Q}_i^1 \hat{Q}_j^2 \hat{\varrho}'_S - \hat{Q}_j^2 \hat{\varrho}'_S \hat{Q}_i^1 \right) - \langle \hat{F}_j^2 \hat{F}_i^1 \rangle_R \left( \hat{Q}_i^1 \hat{\varrho}'_S \hat{Q}_j^2 - \hat{\varrho}'_S \hat{Q}_j^2 \hat{Q}_i^1 \right) \end{aligned}$$

- ▶ Příslušné střední hodnoty a korelační funkce:

$$\begin{aligned} \langle \hat{F}_i^1 \rangle_R &= \text{Tr}_R \left( \hat{F}_i^1(t_1 - t_0) \hat{\varrho}'_R \right), \\ \langle \hat{F}_i^1 \hat{F}_j^2 \rangle_R &= \text{Tr}_R \left( \hat{F}_i^1(t_1 - t_0) \hat{F}_j^2(t_2 - t_0) \hat{\varrho}'_R \right), \\ \langle \hat{F}_i^2 \hat{F}_j^1 \rangle_R &= \text{Tr}_R \left( \hat{F}_i^2(t_2 - t_0) \hat{F}_j^1(t_1 - t_0) \hat{\varrho}'_R \right) \end{aligned}$$



- Dostaneme:

$$\begin{aligned}
 \hat{\rho}'_S(t) - \hat{\rho}'_S(t_0) &= -i \sum_i \int_{t_0}^t [\hat{Q}_i^1, \hat{\rho}'_S(t_0)] \langle \hat{F}_i^1 \rangle_R dt_1 - \\
 &- \sum_{i,j} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \left\{ \left( \hat{Q}_i^1 \hat{Q}_j^2 \hat{\rho}'_S(t_0) - \hat{Q}_j^2 \hat{\rho}'_S(t_0) \hat{Q}_i^1 \right) \langle \hat{F}_i^1 \hat{F}_j^2 \rangle_R - \right. \\
 &\quad \left. - \left( \hat{Q}_i^1 \hat{\rho}'_S(t_0) \hat{Q}_j^2 - \hat{\rho}'_S(t_0) \hat{Q}_j^2 \hat{Q}_i^1 \right) \langle \hat{F}_j^2 \hat{F}_i^1 \rangle_R \right\}
 \end{aligned}$$

- Dostaneme:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}'_S(t) - \hat{\rho}'_S(t_0) &= -i \sum_i \int_{t_0}^t [\hat{Q}_i^1, \hat{\rho}'_S(t_0)] \langle \hat{F}_i^1 \rangle_R dt_1 - \\ &- \sum_{i,j} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \left\{ \left( \hat{Q}_i^1 \hat{Q}_j^2 \hat{\rho}'_S(t_0) - \hat{Q}_j^2 \hat{\rho}'_S(t_0) \hat{Q}_i^1 \right) \langle \hat{F}_i^1 \hat{F}_j^2 \rangle_R - \right. \\ &\quad \left. - \left( \hat{Q}_i^1 \hat{\rho}'_S(t_0) \hat{Q}_j^2 - \hat{\rho}'_S(t_0) \hat{Q}_j^2 \hat{Q}_i^1 \right) \langle \hat{F}_j^2 \hat{F}_i^1 \rangle_R \right\} \end{aligned}$$

- Rezervoár stacionární  $\Rightarrow \hat{F}_i$  stacionární  $\Rightarrow \langle \hat{F}_i^1 \rangle_R$  není funkcí času

- Dostaneme:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}'_S(t) - \hat{\rho}'_S(t_0) &= -i \sum_i \int_{t_0}^t [\hat{Q}_i^1, \hat{\rho}'_S(t_0)] \langle \hat{F}_i^1 \rangle_R dt_1 - \\ &- \sum_{i,j} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \left\{ \left( \hat{Q}_i^1 \hat{Q}_j^2 \hat{\rho}'_S(t_0) - \hat{Q}_j^2 \hat{\rho}'_S(t_0) \hat{Q}_i^1 \right) \langle \hat{F}_i^1 \hat{F}_j^2 \rangle_R - \right. \\ &\quad \left. - \left( \hat{Q}_i^1 \hat{\rho}'_S(t_0) \hat{Q}_j^2 - \hat{\rho}'_S(t_0) \hat{Q}_j^2 \hat{Q}_i^1 \right) \langle \hat{F}_j^2 \hat{F}_i^1 \rangle_R \right\} \end{aligned}$$

- Rezervoár stacionární  $\Rightarrow \hat{F}_i$  stacionární  $\Rightarrow \langle \hat{F}_i^1 \rangle_R$  není funkcí času
- Rezervoár stacionární  $\Rightarrow$  korelační funkce nezávisí na volbě počátku  $t_0$ , pouze na rozdílu  $t_1$  a  $t_2$ :

$$\begin{aligned} \langle \hat{F}_i^1 \hat{F}_j^2 \rangle_R &= \langle \hat{F}_i^1(t_1 - t_2) \hat{F}_j^1(0) \rangle_R \\ \langle \hat{F}_i^2 \hat{F}_j^1 \rangle_R &= \langle \hat{F}_i^1(0) \hat{F}_j^1(t_1 - t_2) \rangle_R \end{aligned}$$

- Dostaneme:

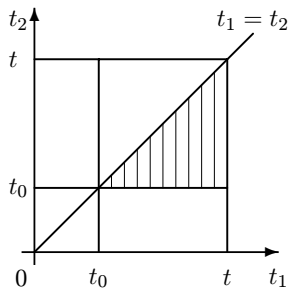
$$\begin{aligned} \hat{\rho}'_S(t) - \hat{\rho}'_S(t_0) &= -i \sum_i \int_{t_0}^t [\hat{Q}_i^1, \hat{\rho}'_S(t_0)] \langle \hat{F}_i^1 \rangle_R dt_1 - \\ &- \sum_{i,j} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \left\{ \left( \hat{Q}_i^1 \hat{Q}_j^2 \hat{\rho}'_S(t_0) - \hat{Q}_j^2 \hat{\rho}'_S(t_0) \hat{Q}_i^1 \right) \langle \hat{F}_i^1 \hat{F}_j^2 \rangle_R - \right. \\ &\quad \left. - \left( \hat{Q}_i^1 \hat{\rho}'_S(t_0) \hat{Q}_j^2 - \hat{\rho}'_S(t_0) \hat{Q}_j^2 \hat{Q}_i^1 \right) \langle \hat{F}_j^2 \hat{F}_i^1 \rangle_R \right\} \end{aligned}$$

- Rezervoár stacionární  $\Rightarrow \hat{F}_i$  stacionární  $\Rightarrow \langle \hat{F}_i^1 \rangle_R$  není funkcí času
- Rezervoár stacionární  $\Rightarrow$  korelační funkce nezávisí na volbě počátku  $t_0$ , pouze na rozdílu  $t_1$  a  $t_2$ :

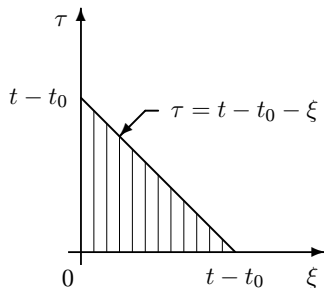
$$\begin{aligned} \langle \hat{F}_i^1 \hat{F}_j^2 \rangle_R &= \langle \hat{F}_i^1(t_1 - t_2) \hat{F}_j^1(0) \rangle_R \\ \langle \hat{F}_i^2 \hat{F}_j^1 \rangle_R &= \langle \hat{F}_i^1(0) \hat{F}_j^1(t_1 - t_2) \rangle_R \end{aligned}$$

- V dalším kroku provedeme transformaci integračních proměnných, aby integrace probíhala od 0

Nové proměnné (DC 1.2):  $\xi = t_2 - t_0$ ,  $\tau = t_1 - t_2$



$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \{ \dots \}$$



$$\Rightarrow \int_0^{t-t_0} d\xi \int_0^{t-t_0-\xi} d\tau \{ \dots \}$$

Z rovnice

$$\begin{aligned} \hat{\varrho}'_S(t) - \hat{\varrho}'_S(t_0) &= -i \sum_i \int_{t_0}^t [\hat{Q}'_i, \hat{\varrho}'_S(t_0)] \langle \hat{F}'_i \rangle_R dt_1 - \\ &- \sum_{i,j} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \left\{ \left( \hat{Q}'_i \hat{Q}'_j \hat{\varrho}'_S(t_0) - \hat{Q}'_j \hat{\varrho}'_S(t_0) \hat{Q}'_i \right) \langle \hat{F}'_i \hat{F}'_j \rangle_R - \right. \\ &\quad \left. - \left( \hat{Q}'_i \hat{\varrho}'_S(t_0) \hat{Q}'_j - \hat{\varrho}'_S(t_0) \hat{Q}'_j \hat{Q}'_i \right) \langle \hat{F}'_j \hat{F}'_i \rangle_R \right\} \end{aligned}$$

po provedení transformace a s využitím stacionarity rezervoáru  $R$  dostaneme

$$\begin{aligned} \hat{\varrho}'_S(t) - \hat{\varrho}'_S(t_0) &= -i \sum_i \langle \hat{F}'_i \rangle_R \int_{t_0}^t dt_1 \left[ \hat{Q}'_i(t_1 - t_0), \hat{\varrho}'_S(t_0) \right] - \sum_{i,j} \int_0^{t-t_0} d\xi \int_0^{t-t_0-\xi} d\tau \times \\ &\times \left\{ \left( \hat{Q}'_i(\tau + \xi) \hat{Q}'_j(\xi) \hat{\varrho}'_S(t_0) - \hat{Q}'_j(\xi) \hat{\varrho}'_S(t_0) \hat{Q}'_i(\tau + \xi) \right) \langle \hat{F}'_i(\tau) \hat{F}'_j \rangle_R - \right. \\ &\quad \left. - \left( \hat{Q}'_i(\tau + \xi) \hat{\varrho}'_S(t_0) \hat{Q}'_j(\xi) - \hat{\varrho}'_S(t_0) \hat{Q}'_j(\xi) \hat{Q}'_i(\xi + \tau) \right) \langle \hat{F}'_j \hat{F}'_i(\tau) \rangle_R \right\} \end{aligned}$$

vyjádření časového vývoje redukovaného statistického operátoru v interakční reprezentaci – vývoj systému  $S$  do druhého řádu poruchové teorie.

- ▶ Definitornicky zavedeme „vlastní frekvence operátoru systému  $\hat{Q}_i^I$ “

$$\hat{Q}_i^I(\lambda) = e^{(i/\hbar)\hat{H}_S\lambda} \hat{Q}_i^S e^{-(i/\hbar)\hat{H}_S\lambda} = e^{i\omega_i\lambda} \hat{Q}_i^S$$

- ▶ Definitornicky zavedeme „vlastní frekvence operátoru systému  $\hat{Q}_i^I$ “

$$\hat{Q}_i^I(\lambda) = e^{(i/\hbar)\hat{H}_S\lambda} \hat{Q}_i^S e^{-(i/\hbar)\hat{H}_S\lambda} = e^{i\omega_i\lambda} \hat{Q}_i^S$$

- ▶  $\hat{Q}_i^I$  – předpokládáme harmonický průběh v čase s vlastní frekvencí  $\omega_i$



- ▶ Definitornicky zavedeme „vlastní frekvence operátoru systému  $\hat{Q}_i^I$ “

$$\hat{Q}_i^I(\lambda) = e^{(i/\hbar)\hat{H}_S\lambda} \hat{Q}_i^S e^{-(i/\hbar)\hat{H}_S\lambda} = e^{i\omega_i\lambda} \hat{Q}_i^S$$

- ▶  $\hat{Q}_i^I$  – předpokládáme harmonický průběh v čase s vlastní frekvencí  $\omega_i$
- ▶ Příklad: elmag. pole,  $\hat{H} = \hbar\omega_i\hat{n}$

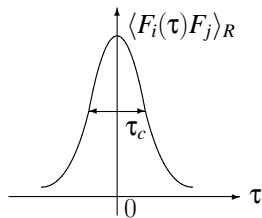
- ▶ Definitornicky zavedeme „vlastní frekvence operátoru systému  $\hat{Q}_i^I$ “

$$\hat{Q}_i^I(\lambda) = e^{(i/\hbar)\hat{H}_S\lambda} \hat{Q}_i^S e^{-(i/\hbar)\hat{H}_S\lambda} = e^{i\omega_i\lambda} \hat{Q}_i^S$$

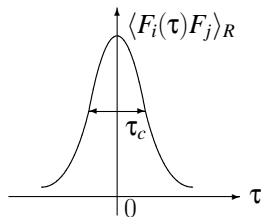
- ▶  $\hat{Q}_i^I$  – předpokládáme harmonický průběh v čase s vlastní frekvencí  $\omega_i$
- ▶ Příklad: elmag. pole,  $\hat{H} = \hbar\omega_i\hat{n}$
- ▶ Dostaneme:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_S^I(t) - \hat{\rho}_S^I(t_0) &= -i \sum_i \langle \hat{F}_i \rangle_R \left[ \hat{Q}_i^S, \hat{\rho}_S^I(t_0) \right] \int_0^{t-t_0} d\xi e^{i\omega_i\xi} - \\ &- \sum_{i,j} \left( \hat{Q}_i^S \hat{Q}_j^S \hat{\rho}_S^I(t_0) - \hat{Q}_j^S \hat{\rho}_S^I(t_0) \hat{Q}_i^S \right) \int_0^{t-t_0} d\xi e^{i(\omega_i+\omega_j)\xi} \int_0^{t-t_0-\xi} d\tau e^{i\omega_j\tau} \langle \hat{F}_i(\tau) \hat{F}_j \rangle_R - \\ &- \sum_{i,j} \left( \hat{Q}_i^S \hat{\rho}_S^I(t_0) \hat{Q}_j^S - \hat{\rho}_S^I(t_0) \hat{Q}_j^S \hat{Q}_i^S \right) \int_0^{t-t_0} d\xi e^{i(\omega_i+\omega_j)\xi} \int_0^{t-t_0-\xi} d\tau e^{i\omega_i\tau} \langle \hat{F}_j \hat{F}_i(\tau) \rangle_R \end{aligned}$$

- ▶ Interakcí Systému s Rezervoárem mohou vzniknout fluktuace v rezervoáru – relaxační doba  $\tau_c$

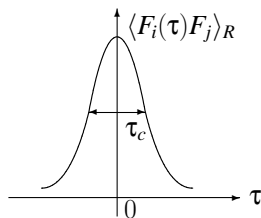


- ▶ Interakcí Systému s Rezervoárem mohou vzniknout fluktuace v rezervoáru – relaxační doba  $\tau_c$



- ▶ Pokud zanedbáme zpětný vliv těchto fluktuací na Systém a budeme studovat soustavu jen pro  $t - t_0 \gg \tau_c$ , můžeme při výpočtu integrálů z korelačních funkcí rezervoáru  $R$  posunout mez integrace přes  $\tau$  a  $\xi$  do nekonečna.

- ▶ Interakcí Systému s Rezervoárem mohou vzniknout fluktuace v rezervoáru – relaxační doba  $\tau_c$



- ▶ Pokud zanedbáme zpětný vliv těchto fluktuací na Systém a budeme studovat soustavu jen pro  $t - t_0 \gg \tau_c$ , můžeme při výpočtu integrálů z korelačních funkcí rezervoáru  $R$  posunout mez integrace přes  $\tau$  a  $\xi$  do nekonečna.
- ▶ Statistická budoucnost Systému bude závislá pouze na stavu systému v daném okamžiku – systém „nemá paměť“

$$\begin{aligned}
 \hat{\varrho}'_S(t) - \hat{\varrho}'_S(t_0) &= -i \sum_i \langle \hat{F}_i \rangle_R [\hat{Q}_i^S, \hat{\varrho}'_S(t_0)] I(\omega_i) - \\
 &\quad - \sum_{i,j} \left( \hat{Q}_i^S \hat{Q}_j^S \hat{\varrho}'_S(t_0) - \hat{Q}_j^S \hat{\varrho}'_S(t_0) \hat{Q}_i^S \right) I(\omega_i + \omega_j) w_{ij}^+ - \\
 &\quad - \sum_{i,j} \left( \hat{Q}_i^S \hat{\varrho}'_S(t_0) \hat{Q}_j^S - \hat{\varrho}'_S(t_0) \hat{Q}_j^S \hat{Q}_i^S \right) I(\omega_i + \omega_j) w_{ji}^-
 \end{aligned}$$

Spektrální hustoty korelačních funkcí:

$$w_{ij}^+ = \int_0^\infty e^{i\omega_i \tau} \langle \hat{F}_i(\tau) \hat{F}_j \rangle_R d\tau$$

$$w_{ji}^- = \int_0^\infty e^{i\omega_j \tau} \langle \hat{F}_j \hat{F}_i(\tau) \rangle_R d\tau$$

$$I(\omega_i) = \int_0^{t-t_0} e^{i\omega_i \xi} d\xi \quad \text{pro } t - t_0 \gg \omega_i^{-1} \quad \Rightarrow \quad I(\omega_i) = (t - t_0) \delta(\omega_i) \quad (\text{DC 1.3})$$

$$\frac{\Delta \hat{\rho}'_S}{\Delta t} = - \sum_{i,j} \delta(\omega_i + \omega_j) \left\{ \left( \hat{Q}_i^S \hat{Q}_j^S \hat{\rho}'_S(t_0) - \hat{Q}_j^S \hat{\rho}'_S(t_0) \hat{Q}_i^S \right) w_{ij}^+ - \left( \hat{Q}_i^S \hat{\rho}'_S(t_0) \hat{Q}_j^S - \hat{\rho}'_S(t_0) \hat{Q}_j^S \hat{Q}_i^S \right) w_{ji}^- \right\}$$

$$\begin{aligned} \Delta \hat{\rho}'_S &= \hat{\rho}'_S(t) - \hat{\rho}'_S(t_0) \\ \Delta t &= t - t_0, \end{aligned}$$

- ▶ Aby bylo možno přejít od diferencí k diferenciálům, musí být na intervalu  $\Delta t$  změna systému v důsledku tlumení (charakteristická doba  $\gamma^{-1}$ ) „malá“, tj.  $t - t_0 \ll \gamma^{-1}$ . Potom:

$$\Delta \hat{\rho}'_S \doteq \Delta t \frac{d\hat{\rho}'_S}{dt}$$

$$\frac{\Delta \hat{\rho}'_S}{\Delta t} = - \sum_{i,j} \delta(\omega_i + \omega_j) \left\{ \left( \hat{Q}_i^S \hat{Q}_j^S \hat{\rho}'_S(t_0) - \hat{Q}_j^S \hat{\rho}'_S(t_0) \hat{Q}_i^S \right) w_{ij}^+ - \left( \hat{Q}_i^S \hat{\rho}'_S(t_0) \hat{Q}_j^S - \hat{\rho}'_S(t_0) \hat{Q}_j^S \hat{Q}_i^S \right) w_{ji}^- \right\}$$

$$\begin{aligned} \Delta \hat{\rho}'_S &= \hat{\rho}'_S(t) - \hat{\rho}'_S(t_0) \\ \Delta t &= t - t_0, \end{aligned}$$

- ▶ Aby bylo možno přejít od diferencí k diferenciálům, musí být na intervalu  $\Delta t$  změna systému v důsledku tlumení (charakteristická doba  $\gamma^{-1}$ ) „malá“, tj.  $t - t_0 \ll \gamma^{-1}$ . Potom:

$$\Delta \hat{\rho}'_S \doteq \Delta t \frac{d\hat{\rho}'_S}{dt}$$

- ▶ Zároveň musí být na intervalu  $\Delta t$  splněn předpoklad markovovské aproximace. Dohromady  $\tau_c \ll t - t_0 \ll \gamma^{-1}$



$$\frac{\Delta \hat{\varrho}'_S}{\Delta t} = - \sum_{i,j} \delta(\omega_i + \omega_j) \left\{ \left( \hat{Q}_i^S \hat{Q}_j^S \hat{\varrho}'_S(t_0) - \hat{Q}_j^S \hat{\varrho}'_S(t_0) \hat{Q}_i^S \right) w_{ij}^+ - \left( \hat{Q}_i^S \hat{\varrho}'_S(t_0) \hat{Q}_j^S - \hat{\varrho}'_S(t_0) \hat{Q}_j^S \hat{Q}_i^S \right) w_{ji}^- \right\}$$

$$\begin{aligned} \Delta \hat{\varrho}'_S &= \hat{\varrho}'_S(t) - \hat{\varrho}'_S(t_0) \\ \Delta t &= t - t_0, \end{aligned}$$

- ▶ Aby bylo možno přejít od diferencí k diferenciálům, musí být na intervalu  $\Delta t$  změna systému v důsledku tlumení (charakteristická doba  $\gamma^{-1}$ ) „malá“, tj.  $t - t_0 \ll \gamma^{-1}$ . Potom:

$$\Delta \hat{\varrho}'_S \doteq \Delta t \frac{d\hat{\varrho}'_S}{dt}$$

- ▶ Zároveň musí být na intervalu  $\Delta t$  splněn předpoklad markovovské aproximace. Dohromady  $\tau_c \ll t - t_0 \ll \gamma^{-1}$
- ▶ Přejít ke Schrödingerově reprezentaci (DC 1.5)

$$\frac{\partial \hat{\rho}_S^S(t)}{\partial t} \doteq \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}_S, \hat{\rho}_S^S(t)] - \sum_{i,j} \delta(\omega_i + \omega_j) \times \\ \times \left\{ \left( \hat{Q}_i^S \hat{Q}_j^S \hat{\rho}_S^S(t) - \hat{Q}_j^S \hat{\rho}_S^S(t) \hat{Q}_i^S \right) w_{ij}^+ - \left( \hat{Q}_i^S \hat{\rho}_S^S(t) \hat{Q}_j^S - \hat{\rho}_S^S(t) \hat{Q}_j^S \hat{Q}_i^S \right) w_{ji}^- \right\}$$

- ▶ MASTER EQUATION – obdoba Liouvillova teorému.

$$\frac{\partial \hat{\rho}_S^S(t)}{\partial t} \doteq \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}_S, \hat{\rho}_S^S(t)] - \sum_{i,j} \delta(\omega_i + \omega_j) \times \\ \times \left\{ \left( \hat{Q}_i^S \hat{Q}_j^S \hat{\rho}_S^S(t) - \hat{Q}_j^S \hat{\rho}_S^S(t) \hat{Q}_i^S \right) w_{ij}^+ - \left( \hat{Q}_i^S \hat{\rho}_S^S(t) \hat{Q}_j^S - \hat{\rho}_S^S(t) \hat{Q}_j^S \hat{Q}_i^S \right) w_{ji}^- \right\}$$

- ▶ MASTER EQUATION – obdoba Liouvillova teorému.
- ▶ Platí do druhého řádu poruchové teorie.

$$\frac{\partial \hat{\rho}_S^S(t)}{\partial t} \doteq \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}_S, \hat{\rho}_S^S(t)] - \sum_{i,j} \delta(\omega_i + \omega_j) \times \\ \times \left\{ \left( \hat{Q}_i^S \hat{Q}_j^S \hat{\rho}_S^S(t) - \hat{Q}_j^S \hat{\rho}_S^S(t) \hat{Q}_i^S \right) w_{ij}^+ - \left( \hat{Q}_i^S \hat{\rho}_S^S(t) \hat{Q}_j^S - \hat{\rho}_S^S(t) \hat{Q}_j^S \hat{Q}_i^S \right) w_{ji}^- \right\}$$

- ▶ MASTER EQUATION – obdoba Liouvillova teorému.
- ▶ Platí do druhého řádu poruchové teorie.
- ▶ Při volbě kroku výpočtu musí být splněny požadavky Markovovské aproximace  $\tau_c \ll t - t_0 \ll \gamma^{-1}$  a musí být zohledněna perioda vlastních kmitů systému  $t - t_0 \gg \omega_i^{-1}$ .

$$\frac{\partial \hat{\rho}_S^S(t)}{\partial t} \doteq \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}_S, \hat{\rho}_S^S(t)] - \sum_{i,j} \delta(\omega_i + \omega_j) \times \\ \times \left\{ \left( \hat{Q}_i^S \hat{Q}_j^S \hat{\rho}_S^S(t) - \hat{Q}_j^S \hat{\rho}_S^S(t) \hat{Q}_i^S \right) w_{ij}^+ - \left( \hat{Q}_i^S \hat{\rho}_S^S(t) \hat{Q}_j^S - \hat{\rho}_S^S(t) \hat{Q}_j^S \hat{Q}_i^S \right) w_{ji}^- \right\}$$

- ▶ MASTER EQUATION – obdoba Liouvillova teorému.
- ▶ Platí do druhého řádu poruchové teorie.
- ▶ Při volbě kroku výpočtu musí být splněny požadavky Markovovské aproximace  $\tau_c \ll t - t_0 \ll \gamma^{-1}$  a musí být zohledněna perioda vlastních kmitů systému  $t - t_0 \gg \omega_i^{-1}$ .
- ▶ Vliv Rezervoáru započítán pouze prostřednictvím spektrálních hustot  $w^\pm$  korelačních funkcí  $\langle \hat{F}(\tau) \hat{F} \rangle_R$  Rezervoáru odpovídajících vlastní frekvenci  $\omega_j$  Systému.

$$\frac{\partial \hat{\rho}_S^S(t)}{\partial t} \doteq \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}_S, \hat{\rho}_S^S(t)] - \sum_{i,j} \delta(\omega_i + \omega_j) \times \\ \times \left\{ \left( \hat{Q}_i^S \hat{Q}_j^S \hat{\rho}_S^S(t) - \hat{Q}_j^S \hat{\rho}_S^S(t) \hat{Q}_i^S \right) w_{ij}^+ - \left( \hat{Q}_i^S \hat{\rho}_S^S(t) \hat{Q}_j^S - \hat{\rho}_S^S(t) \hat{Q}_j^S \hat{Q}_i^S \right) w_{ji}^- \right\}$$

- ▶ MASTER EQUATION – obdoba Liouvillova teorému.
- ▶ Platí do druhého řádu poruchové teorie.
- ▶ Při volbě kroku výpočtu musí být splněny požadavky Markovovské aproximace  $\tau_c \ll t - t_0 \ll \gamma^{-1}$  a musí být zohledněna perioda vlastních kmitů systému  $t - t_0 \gg \omega_i^{-1}$ .
- ▶ Vliv Rezervoáru započítán pouze prostřednictvím spektrálních hustot  $w^\pm$  korelačních funkcí  $\langle \hat{F}(\tau) \hat{F} \rangle_R$  Rezervoáru odpovídajících vlastní frekvenci  $\omega_j$  Systému.
- ▶ Statistická budoucnost Systému vychází ze znalosti stavu Systému v jednom okamžiku.

- ▶ Laser jako uzavřená soustava

- ▶ Laser jako uzavřená soustava
- ▶ Kvantový Liouvilleův teorém



- ▶ Laser jako uzavřená soustava
- ▶ Kvantový Liouvilleův teorém
- ▶ Řešení pro tlumení kvantové soustavy „černým tělesem“

- ▶ Laser jako uzavřená soustava
- ▶ Kvantový Liouvilleův teorém
- ▶ Řešení pro tlumení kvantové soustavy „černým tělesem“
  1. 2. řád poruchové teorie

- ▶ Laser jako uzavřená soustava
- ▶ Kvantový Liouvilleův teorém
- ▶ Řešení pro tlumení kvantové soustavy „černým tělesem“
  1. 2. řád poruchové teorie
  2. Redukovaný statistický operátor

- ▶ Laser jako uzavřená soustava
- ▶ Kvantový Liouvilleův teorém
- ▶ Řešení pro tlumení kvantové soustavy „černým tělesem“
  1. 2. řád poruchové teorie
  2. Redukovaný statistický operátor
  3. Speciální tvar interakčního Hamiltoniánu

- ▶ Laser jako uzavřená soustava
- ▶ Kvantový Liouvilleův teorém
- ▶ Řešení pro tlumení kvantové soustavy „černým tělesem“
  1. 2. řád poruchové teorie
  2. Redukovaný statistický operátor
  3. Speciální tvar interakčního Hamiltoniánu
  4. Harmonický průběh operátorů systému

- ▶ Laser jako uzavřená soustava
- ▶ Kvantový Liouvilleův teorém
- ▶ Řešení pro tlumení kvantové soustavy „černým tělesem“
  1. 2. řád poruchové teorie
  2. Redukovaný statistický operátor
  3. Speciální tvar interakčního Hamiltoniánu
  4. Harmonický průběh operátorů Systému
  5. Posun horní meze integrace do nekonečna – Markovovská aproximace

- ▶ Laser jako uzavřená soustava
- ▶ Kvantový Liouvilleův teorém
- ▶ Řešení pro tlumení kvantové soustavy „černým tělesem“
  1. 2. řád poruchové teorie
  2. Redukovaný statistický operátor
  3. Speciální tvar interakčního Hamiltoniánu
  4. Harmonický průběh operátorů Systému
  5. Posun horní meze integrace do nekonečna – Markovovská aproximace
- ▶ Řídící rovnice

$$\frac{\partial \hat{\rho}_S^S(t)}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}_S, \hat{\rho}_S^S(t)] - \sum_{i,j} \delta(\omega_i + \omega_j) \times$$

$$\times \left\{ \left( \hat{Q}_i^S \hat{Q}_j^S \hat{\rho}_S^S(t) - \hat{Q}_j^S \hat{\rho}_S^S(t) \hat{Q}_i^S \right) w_{ij}^+ - \left( \hat{Q}_i^S \hat{\rho}_S^S(t) \hat{Q}_j^S - \hat{\rho}_S^S(t) \hat{Q}_j^S \hat{Q}_i^S \right) w_{ji}^- \right\}$$

- ▶ Laser jako uzavřená soustava
- ▶ Kvantový Liouvilleův teorém
- ▶ Řešení pro tlumení kvantové soustavy „černým tělesem“
  1. 2. řád poruchové teorie
  2. Redukovaný statistický operátor
  3. Speciální tvar interakčního Hamiltoniánu
  4. Harmonický průběh operátorů Systému
  5. Posun horní meze integrace do nekonečna – Markovovská aproximace
- ▶ Řídící rovnice

$$\frac{\partial \hat{\rho}_S^S(t)}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}_S, \hat{\rho}_S^S(t)] - \sum_{i,j} \delta(\omega_i + \omega_j) \times$$

$$\times \left\{ \left( \hat{Q}_i^S \hat{Q}_j^S \hat{\rho}_S^S(t) - \hat{Q}_j^S \hat{\rho}_S^S(t) \hat{Q}_i^S \right) w_{ij}^+ - \left( \hat{Q}_i^S \hat{\rho}_S^S(t) \hat{Q}_j^S - \hat{\rho}_S^S(t) \hat{Q}_j^S \hat{Q}_i^S \right) w_{ji}^- \right\}$$

- ▶ Cvičení: konkrétní aplikace na kvantový harmonický oscilátor








- ▶ Laser jako uzavřená soustava
- ▶ Kvantový Liouvilleův teorém
- ▶ Řešení pro tlumení kvantové soustavy „černým tělesem“
  1. 2. řád poruchové teorie
  2. Redukovaný statistický operátor
  3. Speciální tvar interakčního Hamiltoniánu
  4. Harmonický průběh operátorů Systému
  5. Posun horní meze integrace do nekonečna – Markovovská aproximace
- ▶ Řídící rovnice

$$\frac{\partial \hat{\rho}_S^S(t)}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}_S, \hat{\rho}_S^S(t)] - \sum_{i,j} \delta(\omega_i + \omega_j) \times$$

$$\times \left\{ \left( \hat{Q}_i^S \hat{Q}_j^S \hat{\rho}_S^S(t) - \hat{Q}_j^S \hat{\rho}_S^S(t) \hat{Q}_i^S \right) w_{ij}^+ - \left( \hat{Q}_i^S \hat{\rho}_S^S(t) \hat{Q}_j^S - \hat{\rho}_S^S(t) \hat{Q}_j^S \hat{Q}_i^S \right) w_{ji}^- \right\}$$

- ▶ Cvičení: konkrétní aplikace na kvantový harmonický oscilátor
- ▶ Příště: konkrétní aplikace na tlumený „atom“ – Pauliho rovnice

-  VRBOVÁ M., ŠULC J.: *Interakce rezonančního záření s látkou*, Skriptum FJFI ČVUT, Praha, 2006
-  LOUISELL, W. H.: *Quantum statistical properties of radiation*, John Wiley & Sons, New York, 1973
-  VRBOVÁ M. a kol.: *Lasery a moderní optika - Oborová encyklopedie*, Prometheus, Praha, 1994
-  VRBOVÁ M., JELÍNKOVÁ H., GAVRILOV P.: *Úvod do laserové techniky*, Skriptum FJFI ČVUT, Praha, 1994 <http://people.fjfi.cvut.cz/sulcjan1/ulat/>
-  Přednášky: <http://people.fjfi.cvut.cz/sulcjan1/FLA/>