5. Doplňky

5.1. Optimalita odhadu pro m

Na jedné straně víme, že $m \geq s$ je jistě nutné pro rekonstrukci $x \in \mathbb{R}^N_s$. Na druhé straně je rekonstrukce možná (pomocí náhodných matic), pokud $m \geq C s \ln\left(\frac{eN}{s}\right)$.

Je tato mez optimální?

Lemma: Nechť $s \leq N$ jsou přir. čísla. Pak existují podmnožiny $T_1, \dots, T_M \subseteq \{1, \dots, N\}$ takové, že

i) $M \geq \left(\frac{N}{4s}\right)^{s/2}$,

ii) $|T_i| = s$ pro $i = 1, \dots, M$,

iii) $|T_i \cap T_j| < s/2$ pro $i \neq j$.

Důkaz: Greedy algorithm: • Předpokládejme, že $s \leq N/4$, jinak $M=1$.

• Vybereme $T_1, T_2, \dots$ induktivně s (ii) a (iii) & pak dokážeme (i)

• Nechť $T_1 \subset \{1, \dots, N\}$ je libovolná s s elementy.

Počet množin v $\{1, \dots, N\}$, které mají s prvků a s T_1 mají průnik na alespoň $s/2$ prvcích je omezen

$$\sum_{j=\lceil s/2 \rceil}^{s} \binom{s}{j}\binom{N-s}{s-j} \leq 2^s \max_{\lceil s/2 \rceil \leq j \leq s} \binom{N-s}{s-j} = 2^s \binom{N-s}{s-\lceil s/2 \rceil} = 2^s \binom{N-s}{\lfloor s/2 \rfloor}.$$

Tedy existují alespoň

$$\binom{N}{s} - 2^s\binom{N-s}{\lfloor s/2\rfloor}$$

podmnožin $\{1,\dots,N\}$, které mají s prvků a mají průnik s T_1 o méně než $s/2$ prvcích. Nechť T_2 je libovolná z nich.

Mějme již $T_1,\dots,T_j$ s (ii) a (iii). Pak zbývá alespoň

$$\binom{N}{s} - j\cdot\binom{N-s}{\lfloor s/2\rfloor}\cdot 2^s$$

podmnožin $\{1,\dots,N\}$, ze kterých lze vybrat T_{j+1}. Pokračujeme, dokud je tento výraz pozitivní… zastavíme se nejdříve po M krocích, kde

$$\binom{N}{s} - M\binom{N-s}{\lfloor s/2\rfloor}\cdot 2^s \le 0;$$

Tedy
$$M \ge \frac{\binom{N}{s}}{2^s\binom{N-s}{\lfloor s/2\rfloor}} \ge 2^{-s}\frac{\binom{N}{s}}{\binom{N-\lceil s/2\rceil}{\lfloor s/2\rfloor}} = 2^{-s}\cdot\frac{N!}{s!(N-s)!}\cdot\frac{(\lfloor s/2\rfloor)!(N-\lceil s/2\rceil-\lfloor s/2\rfloor)!}{(N-\lceil s/2\rceil)!}$$

$$= 2^{-s}\cdot\frac{N!}{s!\cancel{(N-s)!}}\cdot\frac{(\lfloor s/2\rfloor)!\cancel{(N-s)!}}{(N-\lceil s/2\rceil)!} = 2^{-s}\cdot\frac{N(N-1)\dots(N-\lceil s/2\rceil+1)}{s(s-1)\dots(\lfloor s/2\rfloor+1)}$$

$$= 2^{-s}\cdot\frac{N(N-1)\dots(N-\lceil s/2\rceil+1)}{s(s-1)\dots(s-\lceil s/2\rceil+1)} \ge 2^{-s}\left(\frac{N}{s}\right)^{\lceil s/2\rceil}$$

$$\ge 2^{-s}\left(\frac{N}{s}\right)^{s/2} = \frac{1}{4^{s/2}}\left(\frac{N}{s}\right)^{s/2} = \left(\frac{N}{4s}\right)^{s/2}.$$

Věta: Nechť $s \le m \le N$ jsou přirozená čísla, nechť $A \in \mathbb{R}^{m\times N}$

a nechť $\Delta : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^N$ je libovolné zobrazení s

$$\|x-\Delta(Ax)\|_2 \le C\,\frac{\sigma_k(x)_1}{\sqrt{k}} \quad \text{pro všechna } x\in\mathbb{R}^N!$$

Pak $$m \ge C' s \ln\left(\frac{eN}{s}\right).$$

Důkaz: Předpokládáme $C \ge 1$ a $s \le \frac{N}{8}$.

Existují množiny (Lemma!) $T_1,\dots,T_M \subset \{1,\dots,N\}$ s

$M \ge \left(\frac{N}{4s}\right)^{s/2}$, $|T_i| = s$ a $|T_i\cap T_j| < s/2$, $i\neq j$

Nechť $x_i = \chi_{T_i}\cdot\frac{1}{\sqrt{s}}$ ... tedy $\|x_i\|_2 = 1$, $\|x_i\|_1 = \sqrt{s}$, $\|x_i - x_j\|_2 > 1$ pro $i\neq j$.

Budiž $$B = \left\{z\in\mathbb{R}^N : \|z\|_1 \le \frac{\sqrt{s}}{4C} \ \&\ \|z\|_2 \le 1/4\right\}.$$

Pak $x_i \in 4CB$

Tvrdíme, že $A(x_i+B)$ jsou podvou disjunktní.

Nechť ne, pak $\exists i\neq j : \exists z,z'\in B : A(x_i+z) = A(x_j+z')$

Tedy: $\Delta(A(x_i+z)) = \Delta(A(x_j+z'))$ a dostaneme

$$1 < \|x_i - x_j\|_2 = \|(x_i+z-\Delta(A(x_i+z))) - (x_j+z'-\Delta(A(x_j+z'))) - z + z'\|_2$$

$$\le \|x_i+z-\Delta(A(x_i+z))\|_2 + \|x_j+z'-\Delta(A(x_j+z'))\|_2 + \|z\|_2 + \|z'\|_2$$

$$\le \frac{C\,\sigma_s(x_i+z)_1}{\sqrt{s}} + \frac{C\,\sigma_s(x_j+z')_1}{\sqrt{s}} + \|z\|_2 + \|z'\|_2$$

x_i je s-sparse
$$\le \frac{C\|z\|_1}{\sqrt{s}} + \frac{C\|z'\|_1}{\sqrt{s}} + \|z\|_2 + \|z'\|_2 \underset{z,z'\in B}{\le} 1.$$

Dále $A(x_i+B) \subseteq A((4C+1)B)$, $i=1,\dots,M$.

Nechť $d \le m$ je dimenze rank A … V budiž d-dim. objem $A(B)$.

Srovnáme objemy:

$$\sum_{j=1}^{M} vol(A(x_j+B)) \le vol((4C+1)A(B))$$

$$\left(\frac{N}{4s}\right)^{s/2}\cdot V \le M\cdot vol(A(\cancel{x}+B)) \le (4C+1)^d\cdot V \le (4C+1)^m\cdot V$$

$$\frac{s}{2}\ln\left(\frac{N}{4s}\right) \le m\ln(4C+1)$$

Pro $s \le \frac{N}{8}$ je $\ln\left(\frac{N}{4s}\right) \ge c'\ln\left(\frac{eN}{s}\right)$ … $m \ge \dfrac{\frac{s}{2}\cdot c'\ln\left(\frac{eN}{s}\right)}{\ln(4C+1)}$.