7. Další algoritmy pro rekonstrukci řídkých vektorů ("sparse recovery")

• Doposud: optimalizační metody ... globální optimalizace konvexních problémů: např.: $\min_{z\in\mathbb{R}^N} \|z\|_1$, s.t. $Az=y$

7.1. Greedy algoritmy (= "hladové algoritmy")

• Orthogonal matching pursuit (OMP)

Pro vstupy $A\in\mathbb{R}^{m\times N}$, $y\in\mathbb{R}^m$

• Inicializace $S^0=\emptyset$, $x^0=0$

• $S^{n+1}=S^n\cup\{j_{n+1}\}$, $j_{n+1}:=\operatorname{argmax}_{j\in\{1,\dots,N\}} |(A^*(y-Ax^n))_j|$

$$x^{n+1}=\operatorname*{argmin}_{\substack{z\in\mathbb{C}^N\\ (\text{resp. } \mathbb{R}^N)}} \{\|y-Az\|_2,\ \operatorname{supp}(z)\subset S^{n+1}\}$$

... opakujeme pro $n\le n_0$ ... výstup $x^\#=x^{n_0}$.

• Iterativní algoritmus, který postupně rozšiřuje nosič (S^j) a hledá nejmenší "chybu" mezi Az, $\operatorname{supp}(z)\subset S^j$ a y.

• Proč rozšiřujeme potenciální nosič právě o j_{n+1}?

Lemma: Nechť $A\in\mathbb{C}^{m\times N}$ je matice s ℓ_2-norm. sloupci. Pro dané $S\subset\{1,\dots,N\}$, $j\in\{1,\dots,N\}$ a $v\in\mathbb{C}^N$ s $\operatorname{supp}(v)\subset S$ a

$$w := \operatorname*{argmin}_{z\in\mathbb{C}^N}\{\|y-Az\|_2,\ \operatorname{supp}(z)\subset S\cup\{j\}\}$$

platí

$$\|y-Aw\|_2^2 \le \|y-Av\|_2^2 - |(A^*(y-Av))_j|^2.$$

Důkaz: Uvažujme vektor typu $v+te_j$ s $t\in\mathbb{C}$ ... má nosič na $S\cup\{j\}$

a platí $$\|y-Aw\|_2^2 \le \min_{t\in\mathbb{C}}\|y-A(v+te_j)\|_2^2.$$

Položme $t=\rho e^{i\theta}$, $\rho\ge 0$, $\theta\in[0,2\pi)$:

$$\|y-A(v+te_j)\|_2^2 = \|y-Av-tAe_j\|_2^2 = \|y-Av\|_2^2 + |t|^2\|Ae_j\|_2^2 - 2\operatorname{Re}(\langle \bar{t}(y-Av), Ae_j\rangle)$$

$$= \|y-Av\|_2^2+\rho^2-2\operatorname{Re}\left(\rho e^{i\theta}(A^*(y-Av))_j\right) \ge \|y-Av\|_2^2+\rho^2-2\rho\,|(A^*(y-Av))_j|,$$

kde pro vhodné θ platí i rovnost...

Minimalizace přes ρ: $\rho=|(A^*(y-Av))_j|$ $\Rightarrow$

$$\min_{t\in\mathbb{C}}\|y-A(v+te_j)\|_2^2 = \|y-Av\|_2^2 - |(A^*(y-Av))_j|^2. \qquad \blacksquare$$

Lemma: Pro danou množinu $S\subset\{1,\dots,N\}$ a

$$v := \operatorname*{argmin}_{z\in\mathbb{C}^N}\{\|y-Az\|_2 : \operatorname{supp}(z)\subset S\}$$

platí $(A^*(y-Av))_S = 0$.

Důkaz: • Av je ortogonální projekce y na $\{Az : \operatorname{supp}(z)\subset S\}$...

je tedy charakterizován $\langle y-Av, Az\rangle = 0$ pro $\forall z\in\mathbb{C}^N$ s $\operatorname{supp}(z)\subset S$

... tedy $\langle A^*(y-Av), z\rangle = 0$ pro $\forall z\in\mathbb{C}^N$ s $\operatorname{supp}(z)\subset S$... Tedy $(A^*(y-Av))_S = 0$.

$\blacksquare$

Compressive sampling matching pursuit (CoSaMP)

- Pro $A, y, s \in \{1, \dots, N\}$: $x^0 = 0$
- $U^{n+1} = \text{supp}(x^n) \cup L_{2s}(A^*(y - Ax^n))$

  $L_s(z)$ ... množina indexů s nejv. souřadnic $z \in \mathbb{C}^N$ v abs. hodnotě
- $u^{n+1} = \underset{z \in \mathbb{C}^N}{\text{argmin}} \{\|y - Az\|_2 : \text{supp}(z) \subset U^{n+1}\}$
- $x^{n+1} = H_s(u^{n+1})$ ... $H_s(z) = z_{L_s(z)}$ ... z redukované na s svých největších koef.

.... opakujeme

Věty: • Pro $A \in \mathbb{C}^{m \times N}$, $y = Ax + e$, kde x je s-sparse, x^n z OMP

- Pokud $\delta_{13s} < 1/6$, pak $\|y - Ax^{\bar{n}}\|_2 \leq C\|e\|_2$, $\bar{n} = 12s$.
- Pro $\delta_{4s} < 0.478$ a x^n z (COSAMP) platí

$$\|x^n - x_S\|_2 \leq \rho^n \|x^0 - x_S\|_2 + \tau \|A x_{\bar{S}} + e\|_2,$$ kde $0 < \rho < 1$ a $\tau > 0$ závisí na δ_{4s}.

... spec. x s-sparse, $x^0 = 0$

$$\|x^n - x\|_2 \leq \rho^n \|x\|_2 + \tau \overbrace{\|Ax + e\|_2}^{\|y\|_2}.$$

- Iterative Hard Tresholding : $x_{n+1} := H_s(x^n + A^*(y - Ax^n))$ ... opakovat

  Věta: Pro $\delta_{3s} < 1/2$ a s-řídké $x \in \mathbb{C}^N$ konvergují x^n z (IHT) k x.