

2. Cvičení - Implicitní funkce

- Instruktažní příklad $F(x, y) := x^2 + y^2 - 1 = 0$
- Věta o implicitní funkci: Necht' $\Omega_n \subset \mathbb{R}^n$ a $\Omega_m \subset \mathbb{R}^m$ jsou otevřené množiny a $F : \Omega_n \times \Omega_m \rightarrow \mathbb{R}^m$ je třídy C^1 na $\Omega_n \times \Omega_m$. Dále předpokládejme, že pro nějaké $(a, b) \in \Omega_n \times \Omega_m$ platí:

$$F(a, b) = 0$$

a

$$\det \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) = \det \frac{\partial (F_1, \dots, F_m)}{\partial (y_1, \dots, y_m)}(a, b) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}(a, b) \neq 0.$$

Potom platí:

1. Existují okolí $H_a \subset \Omega_n$ a $H_b \subset \Omega_m$ bodů a a b a právě jedna funkce $f : H_a \rightarrow H_b$ třídy C^1 na H_a tak, že

$$(\forall x \in H_a)(F(x, f(x)) = 0) \quad \text{a} \quad f(a) = b.$$

2. Dále $\det \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \neq 0$ pro všechna $x \in H_a$ a pro derivaci f platí vzorec

$$Df(x) = - \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))$$

pro všechna $x \in H_a$.

9.1 Pro $x + y > 1, z > 0$ rozhodněte, zda $x + y + z = e^z$ zadává implicitně funkci $z = z(x, y)$.

Řešení: Ano, stačí ověřit předpoklady věty o impl. funkci.

9.2 Je soustavou rovnic

$$\Phi_1 : x + y^2 + u^3 - u - v = 0,$$

$$\Phi_2 : x^2 - 3y + u - 2v + 4 = 0$$

určena dvojice funkcí $u = u(x, y), v = v(x, y)$?

Řešení: $\frac{\partial \Phi}{\partial (u, v)} = \begin{pmatrix} 3u^2 - 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ je regulární pro $u \neq \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

9.3 Necht'

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix}, \quad x, y > 0.$$

Zjistěte, zda existuje (globálně nebo alespoň lokálně) F^{-1} .

Řešení: Lokální inverze existuje podle věty o implicitní funkci, globální inverzi lze najít explicitním výpočtem.

9.4 Označme

$$(*) \quad x^2 = y^2.$$

- a) Kolik funkcí $y = y(x)$ splňuje na $\mathbb{R}$ rovnici $(*)$?
- b) Kolik spojitých funkcí na $\mathbb{R}$ splňuje $(*)$?
- c) Kolik diferencovatelných funkcí na $\mathbb{R}$ splňuje $(*)$?
- d) Kolik spojitých funkcí na $(1 - \delta, 1 + \delta)$, $0 < \delta < 1$ splňuje $(*)$ a zároveň $y(1) = 1$?

Řešení: nekonečně mnoho, 4, 2, 1.

9.5 Necht' $y - \varepsilon \sin y = x$, $\varepsilon \in (0, 1)$. Najděte y' , y'' a extrémy funkce y .

$$\text{Řešení: } y' = \frac{1}{1 - \varepsilon \cos y}, y'' = -\frac{\varepsilon \sin y}{(1 - \varepsilon \cos y)^3}.$$

9.6 Určete extrémy funkce $z = z(x, y)$, pokud

$$x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0.$$

Řešení: Podezřelé body: $(-3 + \sqrt{6}, -3 + \sqrt{6})$ a $(-3 - \sqrt{6}, -3 - \sqrt{6})$, $z = -4 \pm 2\sqrt{6}$, z druhých derivací: první je lok. maximum, druhý lok. minimum.

9.7 Najděte extrémy funkce $z = z(x, y)$ zadané implicitně jako $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Řešení: Podezřelé body: $(0, 0, a)$ a $(0, 0, -a)$. Druhé derivace: první je maximum, druhý je minimum.

9.8 Najděte extrémy funkce $z = z(x, y)$ zadané implicitně jako $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z + 10 = 0$.

Řešení: Maximum v bodě $(1, -1, 6)$, minimum v bodě $(1, -1, -2)$.