Markovské procesy

LS 2022/23, FJFI ČVUT

1. Cvičení

Základy pravděpodobnosti

1. (Pravděpodobnostní prostor)
   Ω je množina, která obsahuj všechny možné výsledky náhodného jevu X. Tedy například

   (a) $\Omega = \{O, P\}$ - pro hod mincí

   (b) $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$ - pro hod kostkou

   (c) $\Omega = \mathbb{R}$ - pro náhodnou Gaussovskou proměnnou

   Na prostoru Ω budeme předpokládat zadanou σ-algebru a míru (obvykle značenou $\mathbb{P}$). Událost $A \subset \Omega$ je libovolná (měřitelná) podmnožina Ω. Například $A = \{2, 4, 6\} \subset \Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$ je událost "*na kostce padlo sudé číslo.*"

   Součinový prostor: pro opakování nezávislých veličin je nejjednodušší použít součin $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$. Tedy např. $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\} \times \{1, 2, \dots, 6\}$ pro hod dvěma kostkami.

2. (Podmíněná pravděpodobnost)
   $$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}, \quad \text{pokud} \quad \mathbb{P}(B) \neq 0.$$
   Dvě události A, B jsou nezávislé, pokud $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$, tedy pokud $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

3. (Náhodné proměnné) Jsou zobrazení $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Např. pro
   $$\Omega = \{1, 2, \dots, 6\} \times \{1, 2, \dots, 6\} \to \mathbb{R}, \quad X(k, l) = k + l$$
   je X součtem čísel hozených na dvou kostkách. Pro $A \subset \mathbb{R}$ je $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}$ událost, kterou označíme $\{X \in A\}$. *Střední hodnota* (pro Ω spočetnou) je definována jako
   $$\mathbb{E}[X] = \sum_k k\mathbb{P}(X = k)$$
   a *podmíněná střední hodnota* jako
   $$\mathbb{E}[X|A] = \sum_k k\mathbb{P}(X = k|A).$$
   Rozptyl X je $\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}[X - \mathbb{E}X]^2$.

4. Buď N náhodné celé číslo vygenerované podle Poissonova rozdělení, tedy
   $$\mathbb{P}(N = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$
   kde $\lambda > 0$ je parametr. Poté provedeme N nezávislých Bernoulliho pokusů, každý s parametrem $p \in (0, 1)$, tedy
   $$\mathbb{P}(X_j = 1) = p \quad \text{a} \quad \mathbb{P}(X_j = 0) = 1 - p, \quad j = 1, \dots, N$$
   a označme jako Z počet obdržených jedniček, tedy $Z = \#\{j : X_j = 1\}$. Spočtěte střední hodnotu a rozptyl Z. Najděte rozložení Z.

5. Nechť X, Y jsou dvě nezávislé náhodné veličiny s Poissonovým rozdělením s parametry $\lambda, \mu > 0$. Spočtěte $\mathbb{P}(X = k | X + Y = n)$ pro všechna $k, n \in \mathbb{N}_0$. Dále dokažte, že $X + Y$ má Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda + \mu$.

6. V klobouku je červená a zelená kulička. V prvním kole vytáhneme jednu kuličku, poznamenáme si její barvu, vložíme ji zpět, a přidáme ještě do klobouku další kuličku stejné barvy. V druhém kole opět vytáhneme jednu kuličku. Určete pravděpodobnost, že v prvním kole byla vytažena červená kulička, víte-li, že ve druhém kole byla vytažena červená kulička.

7. Stroj spoléhá na funkčnost tří součástek, z nichž každá (nezávisle na ostatních) pracuje správně s pravděpodobností p a s pravděpodobností $1 - p$ je rozbitá. Stroj funguje, pokud fungují alespoň dvě z těchto součástek. Spočtěte pravděpodobnost, že stroj funguje. Dále předpokládejme, že i p je náhodná veličina, rovnoměrně rozdělená v $[0, 1]$. Spočtěte pak pravděpodobnost, že stroj funguje.

8. Pro úlohu ruinování hráče jsme získali formuli pro pravděpodobnost ruinování hráče A při $p \neq q$
$$f_S(k) = \frac{(q/p)^k - (q/p)^S}{1 - (q/p)^S}, \quad 0 \leq k \leq S. \tag{1}$$
Dokažte, že pro $(p, q) \to (1/2, 1/2)$ dostaneme limitu $(S - k)/S$.

9. Ukažte, že tato řešení odpovídají speciálním řešením získaným pro $S = 2$, $S = 3$.

10. Zkuste najít řešení soustavy $f_S(0) = 1, f_S(S) = 0$ a $f_S(k) = pf_S(k+1) + qf_S(k-1)$ pro $1 \leq k \leq S - 1$ pomocí přepisu do
$$p(f_S(k+1) - f_S(k)) = q(f_S(k) - f_S(k-1)).$$

11. Ověřte, že
$$\mathbb{P}(R_A | X_0 = k) + \mathbb{P}(R_B | X_0 = k) = 1, \quad 0 \leq k \leq S.$$

12. Výherní automat je naprogramován na $p = 0.45$. Hráč i automat mají na začátku 100Kč, jedna hra je o 1Kč. Jaká je pravděpodobnost zruinování hráče a zruinování automatu?

13. Popište detaily řešení nehomogenní rovnice $h_S(k) = 1 + ph_S(k+1) + qh_S(k-1)$ s okrajovými podmínkami $h_S(0) = h_S(S) = 0$.

14. Do řešení opět dosaďte $S = 2$ a $S = 3$ a získejte dříve odvozené speciální řešení.

15. Popište řešení pro $p = q = 1/2$ a získejte $h_S(k) = k(S - k) = h_S(S - k)$.

16. Získejte řešení pro $p = q = 1/2$ jako limitu řešení pro $p \neq q$ a $(p, q) \to (1/2, 1/2)$.