Markovské procesy

LS 2022/23, FJFI ČVUT

4. Cvičení

Galtonův-Watsonův proces

1. **(Vytvořující funkce)** Pro X náhodnou proměnnou s oborem hodnot v $\mathbb{N}_0$ nazýváme mocninnou řadu
$$P_X(s) := \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = n)s^n$$
její vytvořující funkcí. Ukažte, že:
   (a) Pro její poloměr konvergence R_X platí $R_X \geq 1$.
   (b) Dále platí $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{k!} P_X^{(k)}(0)$ pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$.
   (c) Speciálně tedy $\mathbb{P}(X = 0) = P_X(0)$.
   (d) $\mathbb{E}X = P'_X(1-)$ a $\mathbb{E}[X(X-1)\dots(X-k+1)] = P_X^{(k)}(1-)$.
   (e) Konečně pak $\operatorname{var} X = P''_X(1-) + P'_X(1-) - (P'_X(1-))^2$.

2. Určete vytvořující funkci (a její poloměr konvergence) náhodné veličiny s Poissonovým rozdělením s parametrem $\lambda > 0$ a s její pomocí pak určete její střední hodnotu a rozptyl.

3. Dokažte, že pro X a Y dvě nezávislé náhodné veličiny s oborem hodnot v $\mathbb{N}_0$ a vytvořujícími funkcemi P_X a P_Y a $Z = X + Y$ platí $P_Z(s) = P_X(s)P_Y(s), |s| < \min\{R_X, R_Y\}$.

4. Zobecněte předchozí větu na n nezávislých náhodných veličin a s její pomocí pak najděte rozdělení součtu nezávislých Poissonovských veličin $X_1, \dots, X_n$ s parametry $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$.

5. Je-li N náhodná veličina s oborem hodnot v $\mathbb{N}_0$ a $X_1, X_2, \dots$ jsou nezávislé náhodné veličiny, pak $S_N := X_1 + X_2 + \dots + X_N$ je náhodný součet nezávislých veličin. Jsou-li X_i stejně rozdělené, s vytvořující funkcí P_X, pak dokažte, že $P_{S_N}(s) := P_N(P_X(s))$. Dále odvoďte $\mathbb{E}S_N = \mathbb{E}N \cdot \mathbb{E}X_1$ a $\operatorname{var} S_N = \mathbb{E}N \cdot \operatorname{var} X_1 + \operatorname{var} N \cdot (\mathbb{E}X_1)^2$. Použijte tento postup na Poissonovskou slepici.

6. **Galtonův-Watsonův proces větvení**
Tento proces popisuje evoluci populace jednoho druhu, v níž každý jedinec žije jednu jednotku času a na konci svého života dá dělením vznik U novým jedincům, kde $U = k$ s pravděpodobností p_k, tedy
$$\mathbb{P}(U = k) = p_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \text{a} \quad \sum_{k \geq 0} p_k = 1.$$
Označíme-li tedy počet organismů v n-té generaci X_n, pak je
$$X_0 = 1,$$
$$X_n = \begin{cases} \sum_{i=1}^{X_{n-1}} U_i^{(n-1)} & \text{pokud} \quad X_{n-1} \neq 0 \\ 0 \quad \text{pokud} \quad X_{n-1} = 0. \end{cases},$$

$U_i^{(n-1)}$ je tedy počet nových jedinců, kteří vzniknou z i-tého jedince žijícího po $n-1$ krocích. Všechna $U_i^{(n-1)}$ předpokládáme nezávislé. Podle předešlých cvičení tedy platí

$$\begin{aligned} P_{X_n}(s) &= P_{X_{n-1}}(P_U(s)) \\ \mathbb{E}X_n &= \mathbb{E}X_{n-1} \cdot \mathbb{E}U, \\ \operatorname{var} X_n &= \mathbb{E}X_{n-1} \operatorname{var} U + (\mathbb{E}U)^2 \operatorname{var} X_{n-1}. \end{aligned}$$

Dokažte, že pokud $\mathbb{E}U = \mu$ a $\operatorname{var} U = \sigma^2$, pak $\mathbb{E}X_n = \mu^n$ a $\operatorname{var} X_n = \sigma^2 \mu^{n-1} \frac{\mu^n - 1}{\mu - 1}$ pro $\mu \neq 1$ a $\operatorname{var} X_n = n\sigma^2$ pro $\mu = 1$.

7. (**GW2**) Označme $e_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$ pravděpodobnost vyhynutí populace během prvních n kroků. Protože z $X_n = 0$ plyne ihned i $X_{n+1} = 0$, je $(e_n)_n$ neklesající posloupnost, která má tedy limitu $e = \lim\limits_{n\to\infty} e_n$. Dokažte, že e je nejmenší kořen rovnice $x = P_U(x)$ na $[0,1]$.

   (a) Číslo e splňuje rovnici $e = P_U(e)$: Do rovnice $P_{X_n}(s) = P_U(P_{X_{n-1}}(s))$, dosaďte $s = 0$, odvoďte $e_n = P_U(e_{n-1})$ a vezměte limitu.

   (b) Nechť $\eta \in [0,1]$ je nějaké řešení rovnice $P_U(\eta) = \eta$. Dokažte, že pak $e \leq \eta$. Nápověda: využijte monotonii funkce P_U a postupujte indukcí, $e_1 = P_U(e_0) = P_U(0) \leq P_U(\eta) = \eta$, $e_2 = P_U(e_1) \leq P_U(\eta) = \eta, \ldots$

8. (**GW3**) Nechť $p_0 = p_1 = 1/5$ a $p_2 = 3/5$. Najděte střední hodnotu počtu jedinců n-té populace a pravděpodobnost vymření e.

9. (**GW4**) Nechť U je geometrické rozdělení na $\mathbb{N}_0$ s parametrem $0 < p < 1$, tedy $\mathbb{P}(U = k) = p(1-p)^k$. Najděte rozdělení X_n, tedy $\mathbb{P}(X_n = j)$ pro každé $j = 0, 1, 2, \ldots$
   Nápověda: Nejprve najdeme vytvořující funkci $P_{X_n}(s)$ ze vztahů $P_{X_1} = P_U$ a $P_{X_n} = P_U \circ P_{X_{n-1}}$. Označíme-li $\mu = \mathbb{E}U = \frac{q}{p}$, pak vyjde

$$P_{X_n}(s) = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \mu^k - s \sum_{k=1}^{n-1} \mu^k}{\sum_{k=0}^{n} \mu^k - s \sum_{k=1}^{n} \mu^k}.$$

   Tuto funkci pak rozložte do mocninné řady se středem v počátku a srovnejte koeficienty s $P_{X_n}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = k) s^k$.