Markovské procesy

LS 2022/23, FJFI ČVUT

6. Cvičení

Náhodné procházky

1. Uvažujte procházku koně po šachovnici. Na každém poli se kůň rozhodne pro jedno z právě možných polí, nezávisle na minulých skocích.

   (a) Rozmyslete si, že jde o Markovský proces.

   (b) Jaký je stavový prostor?

   (c) Je nerozložitelný? Aperiodický?

   (d) Interpretujte celý proces jako náhodnou procházku na (neorientovaném) grafu.

   (e) Nechť pro tento řetězec a nějaké rozložení pravděpodobností π platí tzv. podmínka detailní rovnováhy
   $$\pi_i P_{i,j} = \pi_j P_{j,i}, \quad i,j \in \mathbb{S}.$$
   Ukažte, že pak tento stav je stacionární.

   (f) Najděte stacionární rozdělení procházky jezdce. Které stavy jsou nejpravděpodobnější? Kolik procent času tráví jezdec v limitě v rohu šachovnice? A kolik na jednom z polí uprostřed šachovnice? Jak dlouho v průměru trvá jezdci, než se vrátí do rohového pole šachovnice?

   (g) Nechť $\mathbb{P}(X_0 = j) = \pi_j$. Pro libovolné pevné $N \in \mathbb{N}$ definujeme $Y_k = X_{N-k}$, pak
   $$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) = \mathbb{P}(Y_{n+1} = j | Y_n = i), \quad 0 \leq n < N$$
   - tedy je řetězec tzv. *reversibilní.*

   (Nápověda: Napište si na každé pole šachovnice počet všech možných pohybů koně pryč z daného pole.)

2. Uvažujte jednoduchou náhodnou procházku s $S_0 = 0$ a $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, kde $\mathbb{P}(X_n = 1) = p$ a $\mathbb{P}(X_n = -1) = q = 1 - p$. Ukažte, že
   $$\mathbb{E}[S_m | S_n] = \begin{cases} \frac{m}{n} S_n, & \text{if } m \leq n, \\ S_n + \mathbb{E}[S_{m-n}], & \text{if } m > n. \end{cases}$$
   Proč výsledek nezávisí na p?

3. Uvažujme jednoduchou náhodnou procházku na $\mathbb{Z}$ s $p = 0.7$ s počátkem v nule. Najděte pravděpodobnost, že stavu 2 je dosaženo dříve než stavu -3. Spočtěte střední hodnotu počtu kroků než procházka dosáhne bodu 2 nebo -3.
   (Nápověda: Označte φ_i pravděpodobnost, že stavu 2 je dosaženo dříve než stavu -3, pokud začínáme ve stavu $-3 < i < 2$. Poté napište rovnice analýzy prvního kroku.)

4. Nechť pro jednoduchou náhodnou procházku s parametry p, q se začátkem v počátku označuje $T_k = \inf\{n \geq 0 : S_n = k\}$ čas prvního dosažení bodu $k \geq 1$.

(a) Dokažte, že

$$T_k = T_1 + (T_2 - T_1) + \cdots + (T_k - T_{k-1})$$

je rozklad T_k na součet nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin.

(b) Označíme-li $G_{T_k}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \mathbb{P}(T_k = n)$ vytvořující funkci T_k, pak (podle 4. série cvičení) plyne, že $G_{T_k}(s) = [G_{T_1}(s)]^k$.

(c) Analýzou prvního kroku odvoďte $G_{T_1}(s) = ps + qs[G_{T_1}(s)]^2$.

(d) Dokažte, že vytvořující funkce T_k je

$$G_{T_k}(s) = \left(\frac{1 - (1 - 4pqs^2)^{1/2}}{2qs} \right)^k, \quad 4pqs^2 < 1.$$

(e) Najděte formuli pro $\mathbb{P}(T_k = n)$ (vcelku technické ...).

(f) Dále odvoďte výraz pro $\mathbb{P}(T_k < +\infty)$.
Nápověda: $\mathbb{P}(T_k < +\infty) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T_k = n) = \lim_{s \to 1-} G_{T_k}(s)$.

(g) Dokažte, že symetrická náhodná jednoduchá procházka na $\mathbb{Z}$ s pravděpodobností 1 navštíví všechna celá čísla.

5. Nechť S_n je jednoduchá symetrická náhodná procházka na $\mathbb{Z}$ a $k \geq 1$.

(a) Dokažte (tzv. *Reflection principle*), že pro $0 \leq k \leq l \leq n$ platí

$$\mathbb{P}(S_n \geq k | S_l = k) = \mathbb{P}(S_n \leq k | S_l = k).$$

(b) Dokažte, že

$$\mathbb{P}(T_k \leq n) = 2\mathbb{P}(S_n \geq k) - \mathbb{P}(S_n = k) = \mathbb{P}(|S_n| \geq k) - \frac{1}{2}\mathbb{P}(|S_n| = k).$$

(c) Pro $M_n = \max(S_0, S_1, \ldots, S_n)$ dokažte

$$\mathbb{P}(M_n \geq k) = \mathbb{P}(T_k \leq n) = 2\mathbb{P}(S_n \geq k) - \mathbb{P}(S_n = k) = \mathbb{P}(|S_n| \geq k) - \frac{1}{2}\mathbb{P}(|S_n| = k).$$

(d) Dále odvoďte (pro n sudé)

$$\mathbb{E}M_n = \mathbb{E}|S_n| + \binom{n}{n/2} 2^{-n-1} - \frac{1}{2}$$

a dokažte, že $\mathbb{E}M_n / \mathbb{E}|S_n| \to 1$ když $n \to \infty$.

6. Pomocí úlohy 4(f) dokažte, že pro náhodnou procházku s $p < q$ platí ($M_\infty = \sup\{S_n : n \in \mathbb{N}_0\}$)

$$\mathbb{E}M_\infty = \frac{p}{q-p}.$$