Markovské procesy

LS 2022/23, FJFI ČVUT

9. Cvičení

Dokažte následující tvrzení použitá v 6. kapitole přednášky:

1. Pokud je $X = (X_n)_{n=0}^{\infty}$ nerozložitelný tranzitní Markovův řetězec s maticí pravděpodobností přechodu P, pak $P_{i,j}^n \to 0$ pro $n \to \infty$ a všechna $i, j \in \mathbb{S}$.
2. Pokud je $X = (X_n)_{n=0}^{\infty}$ nerozložitelný a aperiodický Markovův řetězec s maticí pravděpodobností přechodu P, pak pro každou dvojici $i, j \in \mathbb{S}$ existuje $n_0 > 0$ tak, že $P_{i,j}^n > 0$ pro $n \geq n_0$.
3. A obráceně, pokud pro každou dvojici $i, j \in \mathbb{S}$ existuje $n_0 > 0$ tak, že $P_{i,j}^n > 0$ pro $n \geq n_0$, tak je $X = (X_n)_{n=0}^{\infty}$ nerozložitelný a aperiodický Markovův řetězec.
4. Pokud je $X = (X_n)_{n=0}^{\infty}$ nerozložitelný pozitivně rekurentní Markovův řetězec, $b \in \mathbb{S}$ a $T = \inf\{n \geq 1 : X_n = b\}$ je čas prvního příchodu do b, pak $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$.