Markovské procesy – přednáška
– ČVUT/FJFI
– LS 2018

1. Úvod

Příklad: Teorie her

- Mějme dva hráče A a B, kteří mají banku o S dolarech. V každém kole A získá (a B ztratí) 1 dolar s pravděpodobností p a A ztratí (a B získá) 1 dolar s pravděpodobností $q = 1-p$; $p, q \in (0;1)$.

Označíme X_n počet dolarů hráče A po n kolech, B má tedy $S - X_n$ dolarů. Na začátku má A X_0 dolarů, $X_0 \in [0, S]$.
Hra končí zruinováním jednoho z hráčů, tedy pokud $X_n = 0$ nebo $X_n = S$.

Otázky, které nás zajímají, zahrnují:

- Pravděpodobnost, že A (nebo B) bude zruinován
- Střední dobu hry

Popis hry ... model:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k+1 \mid X_n = k) = p \quad \& \quad \mathbb{P}(X_{n+1} = k-1 \mid X_n = k) = q$$

pro $1 \leq k \leq S-1$

Pro $X_n = 0$ a $X_n = S$ buď X_{n+1} nedefinujeme, nebo položíme $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 0) = 1 = \mathbb{P}(X_{n+1} = S \mid X_n = S)$ ... pohlcující stav
(: hra skončila)

- Hra je "homogenní" - pravděpodobnosti nezávisí na n
- Pokud označíme $S_n = +1$ s pravd. p

  $S_n = -1$ s pravd. q

  (zisk/ztráta hráče A v n-tém kroce), je

  - $X_n = X_0 + S_1 + \dots + S_n$, až do zruinování A nebo B
  - $S_1, S_2, \dots$ jsou nezávislé!

- Pravděpodobnost zruinování

  Nechť R_A je událost: "Hra skončí zruinováním hráče A."

  $\dots R_A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{X_n = 0\}$

  Budeme předpokládat, že $1 \leq X_0 \leq S-1$

  Chceme spočítat (pro pevné p a $q = 1-p$)

  $$f_S(k) = \mathbb{P}(R_A \mid X_0 = k), \quad 0 \leq k \leq S.$$

Lehké případy: • $S = 1$: Hranice $\{0;1\}$ je dosažena již v čase $n = 0$

$$f_1(0) = \mathbb{P}(R_A \mid X_0 = 0) = 1$$

$$f_1(1) = \mathbb{P}(R_A \mid X_0 = 1) = 0$$

• $S = 2$:

$$f_2(0) = \mathbb{P}(R_A \mid X_0 = 0) = 1$$

$$f_2(1) = \mathbb{P}(R_A \mid X_0 = 1) = q \quad \dots \text{zruinování po jedné hře}$$

$$f_2(2) = \mathbb{P}(R_A \mid X_0 = 2) = 0$$

$S=3$: $f_3(0)=1$, $f_3(3)=0$

Ze stavu $X_0=1$ lze dospět do $X_m=0$ jen v lichém ($m=2n+1$) kroce, přičemž $X_0=1, X_1=2, X_2=1, \dots, X_{2n-1}=2, X_{2n}=1, X_{2n+1}=0$, cežmá pravděpodobnost $(pq)^n \cdot q$

Tedy $f_3(1)=\mathbb{P}(R_A|X_0=1)=\sum_{n=0}^{\infty}(pq)^n\cdot q = \dfrac{q}{1-pq}$.

Stejně $f_3(2)=\mathbb{P}(R_A|X_0=2)=\sum_{n=0}^{\infty}(pq)^n\cdot q^2 = \dfrac{q^2}{1-pq}$.

Obecné S...?

Lemma: Pro všechna $k=1,\dots,S-1$ platí

$$\mathbb{P}(R_A|X_0=k)=p\,\mathbb{P}(R_A|X_0=k+1)+q\,\mathbb{P}(R_A|X_0=k-1)$$

Důkaz: Využijeme nezávislosti & dělení podle kroku z X_0 do X_1.

$$\mathbb{P}(R_A|X_0=k)=\mathbb{P}(R_A \,\&\, X_1=k+1|X_0=k)+\mathbb{P}(R_A\,\&\,X_1=k-1|X_0=k)$$

$$=\frac{\mathbb{P}(R_A, X_1=k+1, X_0=k)}{\mathbb{P}(X_0=k)}\cdot\frac{\mathbb{P}(X_1=k+1,X_0=k)}{\mathbb{P}(X_1=k+1,X_0=k)}$$

$$+\frac{\mathbb{P}(R_A, X_1=k-1, X_0=k)}{\mathbb{P}(X_0=k)}\cdot\frac{\mathbb{P}(X_1=k-1,X_0=k)}{\mathbb{P}(X_1=k-1,X_0=k)}$$

$$=\mathbb{P}(R_A|X_1=k+1,X_0=k)\cdot\mathbb{P}(X_1=k+1|X_0=k)$$

$$+\mathbb{P}(R_A|X_1=k-1,X_0=k)\cdot\mathbb{P}(X_1=k-1|X_0=k)$$

$=$

$= p\,\mathbb{P}(R_A \mid X_1 = k+1, X_0 = k) + q\,\mathbb{P}(R_A \mid X_1 = k-1, X_0 = k)$

$= p\,\mathbb{P}(R_A \mid X_0 = k+1) + q\,\mathbb{P}(R_A \mid X_0 = k+1)$.

V posledním kroce užijeme

$$\mathbb{P}(R_A \mid X_1 = k\pm 1, X_0 = k) = \mathbb{P}(R_A \mid X_1 = k\pm 1) = \mathbb{P}(R_A \mid X_0 = k\pm 1)$$

... Vývoj procesu po stavu $X_1 = k\pm 1$ nezávisí na přechodu z X_0 do X_1 a pravděpodobnost zruinování hráče při startu v čase 1 je stejná jako při startu v čase 0. □

Označme-li tedy $f_S(k) = \mathbb{P}(R_A \mid X_0 = k)$ je $f_S : \{0, 1, \dots, S\} \to [0;1]$

a $f_S(k) = p f_S(k+1) + q f_S(k-1)$, $1 \le k \le S-1$,

$f_S(0) = \mathbb{P}(R_A \mid X_0 = 0) = 1$

$f_S(S) = \mathbb{P}(R_A \mid X_0 = S) = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Ukážeme, že pro } p \neq q:\ f_S(k) = \dfrac{(q/p)^k - (q/p)^S}{1-(q/p)^S},\ 0 \le k \le S \\[2ex] \text{\& pro } p = q:\ f_S(k) = \dfrac{S-k}{S} = 1 - \dfrac{k}{S},\ 0 \le k \le S. \end{array}\right\} (*)$$

<u>Cvičení</u>: Ukažte, že toto souhlasí s řešením výše pro $S=2$, $S=3$.

Důkaz (*): Budeme hledat řešení ve tvaru

$k \to f_S(k) = Ca^k$, kde C a a bude určeno rovnicí pro $f_S(k)$
a okrajovými podmínkami

$$\Downarrow \quad Ca^k = f_S(k) = p f_S(k+1) + q f_S(k-1) = pCa^{k+1} + qCa^{k-1}$$

$C \neq 0 \Rightarrow a \neq 0$ $\quad a = pa^2 + q \;\ldots\; 0 = pa^2 - a + q = p(a-1)(a - q/p)$

$\ldots\; p+q=1$

$\Rightarrow$ dvě řešení pro a: $a=1$, nebo $a = q/p \ldots$ jen jedno řešení pro $p=q$.

Nesymetrický případ: $p \neq q \;\ldots\; f_S^1(k) = C_1,\; f_S^2(k) = C_2 \cdot (p/q)^k$

Součet ~~dvou~~ dvou řešení je také řešení, tedy i

$$f_S(k) = C_1 + C_2 (p/q)^k \;\ldots\; C_1, C_2 \text{ dostaneme z poč. podmínek}$$

$f_S(0) = 1 = C_1 + C_2;\; f_S(S) = 0 = C_1 + C_2 (p/q)^S \;\ldots\; C_1 = -\dfrac{(p/q)^S}{1-(p/q)^S},\; C_2 = \dfrac{1}{1-(p/q)^S}$

$\Rightarrow (*)$

Symetrický případ: $p = q = 1/2 \;\ldots\; a_{1,2} = 1 \;\ldots\; f_S^1(k) = C_1$

... Všimneme si, že i $f_S^2(k) = C_2 k$ je řešením ... dostaneme

$$f_S(k) = f_S^1(k) + f_S^2(k) = C_1 + C_2 k.$$

Z okrajových podmínek je $f_S(0) = 1 = C_1,\; f_S(S) = 0 = C_1 + C_2 S$

$\to C_1 = 1,\; C_2 = -1/S \quad \Rightarrow f_S(k) = 1 - \dfrac{k}{S}.$

<u>Cvičení</u> ... získejte formuli pro $p=q=1/2$ z řešení pro $p \neq q$ a $p \to 1/2$.

<u>Cvičení</u> ... přímá metoda $\;\ldots\; p(f_S(k+1) - f_S(k)) = q(f_S(k) - f_S(k-1))$
& indukce!

Pravděpodobnost zruinování hráče získáme prohozením k & $S-k$ a p & q

$$: \mathbb{P}(R_B \mid X_0 = k) = \frac{(p/q)^{S-k} - (p/q)^{S}}{1-(p/q)^{S}}$$

<u>Cvičení</u>: Ověřte, že $\mathbb{P}(R_B \mid X_0 = 0) = 0$, $\mathbb{P}(R_B \mid X_0 = S) = 1$

& ověřte, že $\mathbb{P}(R_A \mid X_0 = k) + \mathbb{P}(R_B \mid X_0 = k) = 1$

.... pravděpodobnost zruinování jednoho z hráčů je 1

... Hra sice může teoreticky trvat nekonečně dlouho

... ale s pravděpodobností nula!

<u>Cvičení</u>: Výherní automat je naprogramován s $p = 0.45$, hráč i automat mají na začátku 100 Kč, jedna hra je o 1 Kč. Jaká je pravděpodobnost zruinování hráče a zruinování automatu?

Střední doba hry?

Střední délka hry

Označme $T_{0,S} = \inf\{n \geq 0 : X_n = 0 \text{ nebo } X_n = S\}$

délku jedné hry. Pokud neexistuje $n \geq 0$ s $X_n = 0$ nebo $X_n = S$,

pak $T_{0,S} := +\infty$ ... neboli $\inf \emptyset = +\infty$

$T_{0,S}$ je náhodná veličina, zajímá nás její střední hodnota

(ev. další parametry)

Označme tedy $h_S(k) := \mathbb{E}[T_{0,S} \mid X_0 = k]$, $0 \leq k \leq S$

- $h_S(0) = \mathbb{E}[T_{0,S} \mid X_0 = 0] = 0$
- $h_S(S) = \mathbb{E}[T_{0,S} \mid X_0 = S] = 0$
- $S = 2$: $T_{0,2} = \begin{cases} 0 & \ldots X_0 = 0 \text{ nebo } X_0 = 2 \\ 1 & \ldots X_0 = 1 \end{cases}$ je dokonce deterministická

  $\overset{\shortparallel}{h_2(k)}$ ... $h_{2,k}(k) = T_{0,2}$ pro $X_0 = k$

- $S = 3$: Rozdělení $T_{0,3}$ pro $X_0 = k$ je možné přímo určit

$$\mathbb{P}(T_{0,3} = 2k \mid X_0 = 1) = p^2 (pq)^{k-1}, \quad k \geq 1$$

$$\mathbb{P}(T_{0,3} = 2k+1 \mid X_0 = 1) = q (pq)^{k}, \quad k \geq 0$$

... při $2k$ krocích a startu v 1 může hra skončit jen v $X_{2k} = 3$,

tedy po k krocích $1 \to 2$ a $2 \to 1$ a dvojici $1 \to 2, 2 \to 3$.

... stejně při $2k+1$ krocích. ... prohozením p, q a hráčů pak

Můžeme tedy přímo spočítat

$$\mathbb{P}(T_{0,3}=2k \mid X_0=2)=q^2(pq)^{k-1},\ k\geq 1$$

$$\mathbb{P}(T_{0,3}=2k+1 \mid X_0=2)=p(pq)^k,\ k\geq 0$$

$$\mathbb{E}[T_{0,3} \mid X_0=2]=$$

$$2\sum_{k=1}^{\infty} k\,\mathbb{P}(T_{0,3}=2k \mid X_0=2)$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)\,\mathbb{P}(T_{0,3}=2k+1 \mid X_0=2)\ \ldots+\overbrace{\infty\cdot\underbrace{\mathbb{P}(T_{0,3}=+\infty)}_{=0}}^{=0}$$

$$=2q^2\sum_{k=1}^{\infty}k(pq)^{k-1}+p\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)(pq)^k$$

$$=2q^2\cdot\frac{1}{1-(pq)^2}+\frac{2p^2q}{(1-pq)^2}+\frac{p}{1-pq}=\frac{2q^2+p+qp^2}{(1-pq)^2}.$$

... prohozením p & q: $\mathbb{E}[T_{0,3} \mid X_0=1]=\dfrac{2p^2+q+pq^2}{(1-pq)^2}$.

... opět neschůdné pro $S\geq 4$.

<u>Lemma</u>: Pro $k=1,\ldots,S-1$ platí

$$\mathbb{E}[T_{0,S} \mid X_0=k]=1+p\,\mathbb{E}[T_{0,S} \mid X_0=k+1]+q\,\mathbb{E}[T_{0,S} \mid X_0=k-1].$$

Důkaz:

$$\mathbb{E}[T_{0,S} \mid X_0 = k] = \sum_{l=0}^{\infty} l \, \mathbb{P}(T_{0,S} = l \mid X_0 = k) = \sum_{l=0}^{\infty} l \frac{\mathbb{P}(T_{0,S} = l \,\&\, X_0 = k)}{\mathbb{P}(X_0 = k)}$$

$$= \frac{1}{\mathbb{P}(X_0=k)} \sum_{l=0}^{\infty} l \left\{ \mathbb{P}(T_{0,S} = l, X_1 = k+1, X_0 = k) + \mathbb{P}(T_{0,S} = l, X_1 = k-1, X_0 = k) \right\}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X_1 = k+1, X_0 = k)}{\mathbb{P}(X_0 = k)} \sum_{l=0}^{\infty} l \frac{\mathbb{P}(T_{0,S} = l, X_1 = k+1, X_0 = k)}{\mathbb{P}(X_1 = k+1, X_0 = k)}$$

$$+ \frac{\mathbb{P}(X_1 = k-1, X_0 = k)}{\mathbb{P}(X_0 = k)} \sum_{l=0}^{\infty} l \frac{\mathbb{P}(T_{0,S} = l, X_1 = k-1, X_0 = k)}{\mathbb{P}(X_1 = k-1, X_0 = k)}$$

$$= \mathbb{P}(X_1 = k+1 \mid X_0 = k) \cdot \mathbb{E}[T_{0,S} = l \mid X_1 = k+1, X_0 = k]$$

$$+ \mathbb{P}(X_1 = k-1 \mid X_0 = k) \, \mathbb{E}[T_{0,S} = l \mid X_1 = k-1, X_0 = k]$$

$$= p \, \mathbb{E}[T_{0,S} = l \mid X_1 = k+1, X_0 = k] + q \, \mathbb{E}[T_{0,S} = l \mid X_1 = k-1, X_0 = k]$$

$$= 1 + p \, \mathbb{E}[T_{0,S} = l \mid X_0 = k+1] + q \, \mathbb{E}[T_{0,S} = l \mid X_0 = k-1].$$

Tedy funkce $h(k) = 1 + p\,h(k+1) + q\,h(k-1), \; 1 \le k \le S-1.$

Pomocí $p+q=1$: $p[h(k+1) - h(k)] - q[h(k) - h(k-1)] = -1$

… diferenční rovnice

$\boxed{p \neq q}$

"Homogenní rovnice" $p[\psi(k+1)-\psi(k)] - q[\psi(k)-\psi(k-1)] = 0, \; 1 \leq k \leq S-1$

má obecní řešení $C_1 + C_2 (p/q)^k$

"Partikulární řešení" ... hledáme ve tvaru $k \to Ck$

$$p[C\cdot(k+1) - Ck] - q[Ck - C(k-1)] = -1$$

$$pC - q\cdot C = -1 \;\ldots\; C = \frac{1}{q-p}$$

... obecní řešení je tedy $h_S(k) = C_1 + C_2 (p/q)^k + \dfrac{k}{q-p}$

Z okr. podmínek $h_S(0) = 0 = C_1 + C_2$

$$h_S(S) = 0 = C_1 + C_2 r^S + \frac{S}{q-p}, \quad r = (p/q).$$

$$\Rightarrow C_1 = -\frac{S}{(q-p)(1-r^S)}, \; C_2 = \frac{S}{(q-p)(1-r^S)}$$

$$\Rightarrow h_S(k) = \mathbb{E}[T_{0,S} \mid X_0 = k] = \frac{1}{q-p}\cdot\left(k - S\frac{1-r^k}{1-r^S}\right), \; 0 \leq k \leq S.$$

<u>Cvičení</u>: ověřte, že souhlasí s řešením pro $S=2$, $S=3$.

<u>Cvičení</u>: Symetrický případ $p=q=1/2$ ... $h_S(k) = k(S-k)$