2. Markovovy řetězce s diskrétním časem

<u>Definice</u>: Buď $(Z_n)_{n=1}^{\infty} = (Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ posloupnost náhodných veličin se spočetným oborem hodnot S. Pak $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$ je <u>Markovský řetězec</u>, pokud rozdělení Z_{n+1} je určeno Z_n a nezávisí na předchozích hodnotách $Z_1, \dots, Z_{n-1}$.

Neboť-li, pokud je splněno <u>Markova vlastnost</u>

$\forall i_0, \dots, i_n, j \in S$:

$$\mathbb{P}(Z_{n+1}=j \mid Z_n=i_n, \dots, Z_0=i_0) = \mathbb{P}(Z_{n+1}=j \mid Z_n=i_n).$$

- Konečné rozdělení procesu lze spočítat z pravděpodobností přechodu $\mathbb{P}(X_{m+1}=i_{m+1} \mid X_m=i_m)$

$$\mathbb{P}(Z_n=i_n, Z_{n-1}=i_{n-1}, \dots, Z_0=i_0)$$

$$= \frac{\mathbb{P}(Z_n=i_n, \dots, Z_0=i_0)}{\mathbb{P}(Z_{n-1}=i_{n-1}, \dots, Z_0=i_0)} \cdot \mathbb{P}(Z_{n-1}=i_{n-1}, \dots, Z_0=i_0)$$

$$= \mathbb{P}(Z_n=i_n \mid Z_{n-1}=i_{n-1}, \dots, Z_0=i_0) \cdot \frac{\mathbb{P}(Z_{n-1}=i_{n-1}, \dots, Z_0=i_0)}{\mathbb{P}(Z_{n-2}=i_{n-2}, \dots, Z_0=i_0)} \cdot \mathbb{P}(Z_{n-2}=i_{n-2}, \dots, Z_0=i_0)$$

$$= \mathbb{P}(Z_n=i_n \mid Z_{n-1}=i_{n-1}) \cdot \mathbb{P}(Z_{n-1}=i_{n-1} \mid Z_{n-2}=i_{n-2}) \cdots \mathbb{P}(Z_1=i_1 \mid Z_0=i_0) \cdot \mathbb{P}(Z_0=i_0)$$

Celý vývoj řetězce je tedy určen počátečním stavem $\mathbb{P}(Z_0=i_0)$ a pravděpodobnostmi přechodu...

Matice přechodu

... Budeme uvažovat homogenní proces:

$$\mathbb{P}(Z_{n+1}=j\,|\,Z_n=i)=\mathbb{P}(Z_1=j\,|\,Z_0=i) \quad \text{pro } \forall\, i,j\in S,\ n\in\mathbb{N}_0.$$

Definice: Buď $Z=(Z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ homogenní Markovův řetězec s oborem hodnot S. Pak matice přechodu Z je

$$[p_{ij}]_{i,j\in S}=[\mathbb{P}(Z_1=j\,|\,Z_0=i)]_{i,j\in S}.$$

- „Počáteční stav" Z je vektor

$$[\pi_j]_{j\in S}=[\mathbb{P}(Z_0=j)]_{j\in S}.$$

Základní vlastnosti matice (p_{ij}):

- Díky identitě $\sum_{j\in S} p_{ij}=\sum_{j\in S}\mathbb{P}(Z_1=j\,|\,Z_0=i)=$

$$=\sum_{j\in S}\frac{\mathbb{P}(Z_1=j\ \&\ Z_0=i)}{\mathbb{P}(Z_0=i)}=\frac{1}{\mathbb{P}(Z_0=i)}\sum_{j\in S}\mathbb{P}(Z_1=j\ \&\ Z_0=i)$$

$$=\frac{1}{\mathbb{P}(Z_0=i)}\cdot\mathbb{P}(Z_0=i)=1$$

je součet hodnot v každém řádku roven 1.

... Stochastická matice: prvky mezi $[0;1]$, součet prvků v každém řádku $=1$.

- Je-li opět $\pi_j = \mathbb{P}(Z_0 = j)$, $j \in S$ počáteční stav a
  $\nu_j = \mathbb{P}(Z_1 = j)$, $j \in S$ stav po jednom kroce,

pak $$\nu_i = \mathbb{P}(Z_1 = i) = \sum_{j \in S} \underbrace{\mathbb{P}(Z_1 = i \mid Z_0 = j)}_{P_{ji}} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(Z_0 = j)}_{\pi_j}$$

$$\boxed{\nu = \pi P} \quad \ldots \text{nebo } \nu^T = (\pi P)^T = P^T \pi^T.$$

- Stav $k \in S$ je absorbující, pokud $P_{k,k} = 1$
- Je-li množina stavů konečná (např. $\{1, \ldots, m\}$), pak
$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & \ldots & P_{1m} \\ P_{m1} & \ldots & P_{mm} \end{bmatrix}.$$

Příklady: • Hra v předchozí kapitole

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & & & & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \ldots & & 0 \\ & q & 0 & p & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & p \\ & & & & q & 0 & \\ 0 & \ldots & & & & 0 & 1 \end{pmatrix} \ldots (S+1) \times (S+1) \text{ matice}$$

.. stavy 0 & S jsou absorbující

- Jednoduchá procházka na $\mathbb{Z}$ ... $(X_0, X_1, X_2, \ldots)$

$$X_0 = 1, \quad X_{n+1} = \begin{cases} X_n + 1 & \text{s pravd.} = 1/2 \\ X_n - 1 & \text{s pravd.} = 1/2. \end{cases}$$

Matice průchodu:

$$\begin{bmatrix} \ddots & \ddots & & & 0 \\ \ddots & 0 & 1/2 & & \\ & 1/2 & 0 & 1/2 & \\ & & 1/2 & 0 & \ddots \\ 0 & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

Pravděpodobnosti průchodu vyššího řádu

Víme již, že je-li v čase n náhodný proces ve stavu $p^{(n)}$ (tedy $(p^{(n)})_j = \mathbb{P}(Z_n = j)$), pak v čase $n+1$ bude ve stavu $p^{(n+1)} = p^{(n)} P$. Odtud snadno plyne, že $p^{(n)} = p^{(0)} P^n$.

Označme dále $P^{(m)} = (P^{(m)})_{i,j}$, kde $P^{(m)}_{ij} = \mathbb{P}(X_m = j \mid X_0 = i)$ pravděpodobnost průchodu z i do j v m krocích, dostaneme pro každé $p^{(0)}$:

$$p^{(m)} = p^{(0)} P^{(m)} \quad \text{ale i} \quad p^{(m)} = p^{(0)} P^m \ldots$$

tedy $P^{(m)} = P^m$.

Jiná forma téhož jsou tzv. Chapman-Kolmogorovy rovnice.

$$\mathbb{P}(Z_{n+m}=j \mid Z_0=i) = \frac{\mathbb{P}(Z_{n+m}=j \,\&\, Z_0=i)}{\mathbb{P}(Z_0=i)} \quad \ldots = P_{ij}^{(n+m)}$$

$$= \sum_{l\in S} \frac{\mathbb{P}(Z_{n+m}=j \,\&\, Z_m=l \,\&\, Z_0=i)}{\mathbb{P}(Z_0=i)}$$

$$= \sum_{l\in S} \frac{\mathbb{P}(Z_{n+m}=j \,\&\, Z_m=l \,\&\, Z_0=i)}{\mathbb{P}(Z_m=l \,\&\, Z_0=i)} \cdot \frac{\mathbb{P}(Z_m=l \,\&\, Z_0=i)}{\mathbb{P}(Z_0=i)}$$

$$= \sum_{l\in S} \mathbb{P}(Z_{n+m}=j \mid Z_m=l \,\&\, Z_0=i) \cdot \mathbb{P}(Z_m=l \mid Z_0=i)$$

$$= \sum_{l\in S} \mathbb{P}(Z_{n+m}=j \mid Z_m=l)\, \mathbb{P}(Z_m=l \mid Z_0=i)$$

$$= \sum_{l\in S} P_{lj}^{(n)} \cdot P_{il}^{(m)} \ldots = \left[P^{(m)}P^{(n)}\right]_{ij}$$

$$\ldots P^{(m+n)} = P^{(m)}P^{(n)}.$$

Pro rychlý popis vývoje náhodného procesu (a pro jeho limitu $n\to+\infty$) je tedy třeba umět efektivně umocňovat matice!

Dvoustavové diskrétní Markovovy řetězce s diskr. časem

Počítání P^n lze provést explicitně pro $|S|=2$... např. $S=\{0,1\}$.

Nechť tedy $P=\begin{bmatrix}1-a & a\\ b & 1-b\end{bmatrix}$, $a,b\in[0,1]$

Tedy $\mathbb{P}(Z_{n+1}=1|Z_n=0)=a$, $\mathbb{P}(Z_{n+1}=0, Z_n=0)=1-a$

$\mathbb{P}(Z_{n+1}=0|Z_n=1)=b$; $\mathbb{P}(Z_{n+1}=1|Z_n=1)=1-b$

Pro $a=b=0$ je $P=Id$ & $P^n=Id$ .. tento případ tedy vynecháme

Lemma: $P^n=\frac{1}{a+b}\begin{bmatrix}b+a(1-a-b)^n & a-a(1-a-b)^n\\ b-b(1-a-b)^n & a+b(1-a-b)^n\end{bmatrix}$, $n\in\mathbb{N}$

Důkaz... šel by dělat indukcí... uděláme "výpočet" diagonalizací

• Matice P má vlastní čísla $\lambda_1=1$ a $\lambda_2=1-a-b\neq\lambda_1$ a vlastní vektory $\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}_{v_1}$ a $\underbrace{\begin{pmatrix}-a\\b\end{pmatrix}}_{v_2}$ .. $Pv_2=\begin{pmatrix}(1-a)(-a)+ba\\ -ab+(1-b)b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a\\b\end{pmatrix}(1-a-b)$

P lze tedy diagonalizovat... napsat ve tvaru $P=M\times D\times M^{-1}$

.. $P=\begin{bmatrix}1 & -a\\ 1 & +b\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b}\\ \frac{-1}{a+b} & \frac{1}{a+b}\end{bmatrix}$

A máme tedy $P^n=(MDM^{-1})^n=MD^nM^{-1}$ .. $D^n=\begin{pmatrix}\lambda_1^n & 0\\ 0 & \lambda_2^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (1-a-b)^n\end{pmatrix}$

$\Rightarrow P^n$ lze zapsat formulí v Lemmatu.

Podívejme se ještě na $\lim_{n\to\infty} \underline{P}^n$:

- $a=b=0$ … $\underline{P}^n = Id \to Id$
- $-1 < 1-(a+b) < 1$ pro $(a,b) \neq (0,0)$ a $(a,b) \neq (1,1)$

… pak $\lambda_2^n \to 0$ a $\underline{P}^n \to \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 1 & +b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \\ \frac{-1}{a+b} & \frac{1}{a+b} \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{a+b} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & a \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{a+b} \begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix}.$$

- Pro $(a,b)=(1,1)$

je $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = P \ldots = P^{2n+1}$

$P^{2n} = Id$ a lim neexistuje.

- Pro $(a,b) \neq (0,0)$ a $(a,b) \neq (1,1)$ a $\pi = [\gamma \;\; 1-\gamma]$ počáteční rozdělení

je rozdělení po n krocích πP^n:

$$\pi P^n \to \pi \cdot \begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{a+b} = \begin{pmatrix} b\gamma + (1-\gamma)b \\ a\gamma + (1-\gamma)a \end{pmatrix}^T \frac{1}{a+b} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}^T \cdot \frac{1}{a+b}$$

… Stav systému tedy konverguje k $\left[\frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b}\right] =: \nu$

Vektor ν splňuje $\nu = \nu \underline{P}$ … je tedy invariantní a lze jej dostat jako limitu πP^n pro $n \to +\infty$ pro lib. poč. podmínku π.

- Pro $(a,b)=(1,1)$ je invariantní $(1/2, 1/2)$, jiné ne.