7. Markovy řetězce se spojitým časem

- Množina ~~proces~~ náhodných veličin $(X_t)_{t\geq 0}$ s(vhodně) definovanou Markovovou vlastností.
- Zejména pojem matice přechodu pravděpodobností přestává dávat smysl
- Stavový prostor je ale stále spočetný.

7.1. Poissonův proces

Poissonův proces $(N_t)_{t\geq 0}$ je proces se stavovým prostorem $S = \{0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{N}_0$, který má neklesající trajektorie (a spojité zprava)

(čítací proces ≡ counting process)

Označme-li $T_k = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : N_t = k\}$, $k \geq 1$ ... $T_0 = 0$ $(N_0 = 0)$ $\boxed{\lim_{k\to\infty} T_k = \infty}$

(čas příchodu k-té události), pak

$$N_t = \sum_{k=1}^{\infty} k\, \chi_{[T_k, T_{k+1})}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{[T_k, +\infty)}(t).$$

Dále vyžadujeme

1, Nezávislé přírůstky: $\forall\, 0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$, $n \geq 1$ jsou

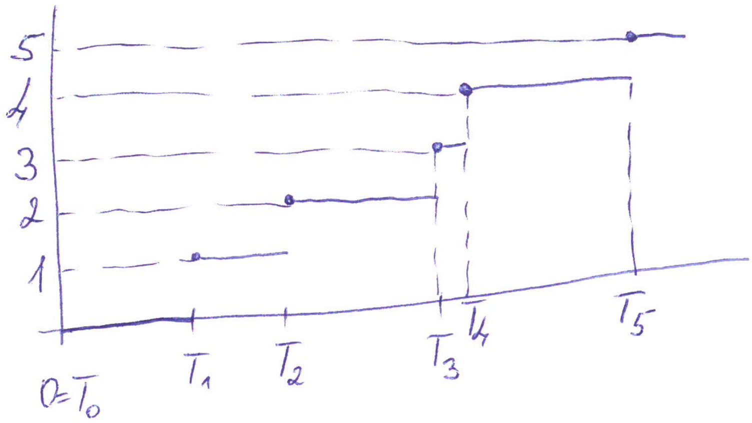
$$N_{t_1} - N_{t_0},\ N_{t_2} - N_{t_1},\ \dots,\ N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$$

nezávislé náhodné proměnné.

2, Stacionární přírůstky $N_{t+h} - N_{s+h}$ je stejně rozložení jako $N_t - N_s$ pro $\forall h \geq 0;\ 0 \leq s \leq t$.

Tedy pro $k \in \mathbb{N}_0$: $\mathbb{P}(N_{t+h} - N_{s+h} = k) = \mathbb{P}(N_t - N_s = k)$.

Typická trajektorie



Věta: Pokud čítací proces splňuje požadavky 1, a 2, pak

$$\mathbb{P}(N_t - N_s = k) = e^{-\lambda(t-s)} \frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \ 0 \le s \le t \text{ pro nějaké } \lambda > 0.$$

Důkaz: • Nechť G_t je vytvořující funkce $N_t = N_t - N_0$, tedy $G_t(u) = \mathbb{E}[u^{N_t}] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N_t = k) u^k$.

Ze stacionarity přírůstků: $N_t - N_s$ má vytvořující $(s < t)$ funkci stejnou jako $N_{t-s} - N_0 = N_{t-s}$, tedy $G_{t-s}(u)$.

• $N_t = (N_t - N_s) + (N_s - N_0)$, $0 < s < t$, = součet dvou nez. proměnných

$\Rightarrow G_t(u) = G_{t-s}(u) G_s(u)$, $0 \le s \le t$, $0 \le u \le 1$.

$\Rightarrow G_{nt}(u) = [G_t(u)]^n$, $0 < t$, $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow G_{p/q}(u) = [G_{1/q}(u)]^p = \{[G_1(u)]^{1/q}\}^p = G_1(u)^{p/q}$, $p, q \in \mathbb{N}$

Funkce $t \to G_t(u)$ je • monotónní v t $G_t(u) = \overbrace{G_{t-s}(u)}^{\leq 1} G_s(u)$
(klesající) $s < t$

• v rac. bodech $t \in \mathbb{Q}$ platí $G_t(u) = [G_1(u)]^t$

$\Rightarrow G_t(u) = [G_1(u)]^t$ platí i pro $t \in \mathbb{R}_+$.

• $G_t(u)$ musí být nenulové ... $G_{t_0}(u) = 0 \Rightarrow G_1(u) = 0 \Rightarrow G_t(u) \equiv 0$ $\forall t$

ale $G_t(u) \geq \mathbb{P}(N_t = 0) = \mathbb{P}(T_1 > t) \nearrow \mathbb{P}(T_1 > 0) = 1$, $t \to 0^+$.

• Pro $\lambda(u) := -\ln(G_1(u))$ je tedy

$$G_t(u) = \left[e^{-\lambda(u)}\right]^t = e^{-t\lambda(u)}, \quad \lambda(u) > 0.$$

• Zbývá ukázat, že $\lambda(u) = (1-u)\lambda$ ... $G_t(u) = e^{-\lambda t(1-u)}$ je vytv. funkce Poiss. rozdělení s $\lambda t > 0$.

• $\lambda(0) \neq 0$ ... $\lambda(0) = 0$ by znamenalo, že $G_t(0) = 1$, $t > 0$ a tedy $1 = \mathbb{P}(N_t = 0)$ pro všechna $t > 0$ ... spor s $\lim_{k \to \infty} T_k = +\infty$.

• Dál ukážeme, že $\mathbb{P}(N_h \geq 2) = o(h)$, $h \to 0$

• Pro $h > 0$ je $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(\{N_{(n-1)h} = 0, N_{nh} - N_{(n-1)h} \geq 2\}) \leq \mathbb{P}(\{T_2 < T_1 + h\})$

$$\sum_{n \geq 1} G_{(n-1)h}(0) \cdot \mathbb{P}(N_{nh} - N_{(n-1)h} \geq 2)$$

$$\sum_{n \geq 1} e^{-(n-1)h\lambda(0)} \cdot \mathbb{P}(N_h \geq 2) = \mathbb{P}(N_h \geq 2) \cdot \frac{1}{1 - e^{-h\lambda(0)}}$$

Pro $h \searrow 0$ je $\mathbb{P}(T_2 < T_1 + h) \to \mathbb{P}(T_2 \leq T_1) = 0$ a

$1 - e^{-h\lambda(0)} \sim h\lambda(0)$ ... $\Rightarrow \mathbb{P}(N_h \geq 2) = o(h)$.

• Nyní už můžeme dopočítat

$$\lambda(u) = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\left(1-e^{-\lambda(u)\cdot h}\right) = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\left(1-G_h(u)\right)$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\left\{1-\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N_h=k)u^k\right\} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\left\{\sum_{k=\cancel{0}1}^{\infty} \mathbb{P}(N_h=k)(1-u^k)\right\}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{\mathbb{P}(N_h=1)(1-u)}{h} + \underbrace{\lim_{h\to 0^+} \frac{\sum_{k=2}^{\infty} \mathbb{P}(N_h=k)(1-u^k)}{h}}_{0\leq}$$

$$\leq \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\mathbb{P}(N_h\geq 2) = 0$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{\mathbb{P}(N_h=1)(1-u)}{h} = \left[\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\mathbb{P}(N_h=1)\right](1-u)$$

limita musí existovat... $=:\lambda$

$\boxtimes$

$$\Rightarrow \lambda(u) = (1-u)\cdot\lambda .$$

Z Věty ~~1~~1 plyne zejména, že $\mathbb{E}[N_t - N_s] = \lambda(t-s)$
a $\operatorname{var}(N_t - N_s) = \lambda(t-s)$.

Parametr $\lambda > 0$ se nazývá <u>intenzita</u> procesu $(N_t)_{t\geq 0}$ a je dána jako

$$\lambda := \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \mathbb{P}(N_h = 1).$$

Zejména: $\mathbb{P}(N_t = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$, $t \in \mathbb{R}_+$ má Poissonovo rozdělení s parametrem λt.

Z $\mathbb{P}(N_h = 1) = h\lambda e^{-\lambda h} \simeq \lambda h$ při $h \to 0$ plyne, že pro krátký časový interval $[0,h]$ lze N_h aproximovat nezávislými Bernoulliho proměnnými ... $\mathbb{P}(N_h = 1) \simeq \lambda h$, $\mathbb{P}(N_h = 0) \simeq 1 - \lambda h$

Věta: T_n jsou náhodné proměnné s hustotou

$$t \to \lambda^n e^{-\lambda t} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, \quad t \geq 0, n \geq 1.$$ ... Erlangova distribuce

<u>Důkaz</u>: • $T_1 > t$ ... první událost nastala až po čase t, tedy $N_t = 0$ ... $\{T_1 > t\} = \{N_t = 0\}$.

• Obecně $\{T_n > t\} = \{N_t < n\}$, $n \geq 1$.

• Pro $n=1$ je $\mathbb{P}(T_1 > t) = \mathbb{P}(N_t = 0) = e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$ ... $e^{-\lambda t} = \int_t^\infty \lambda e^{-\lambda s} ds$

• Pro $n=2$ je $\mathbb{P}(T_2 > t) = \mathbb{P}(T_2 > t \geq T_1) + \mathbb{P}(T_1 > t) =$

$$= \mathbb{P}(N_t = 1) + \mathbb{P}(T_1 > t) =$$

$$= \frac{\lambda t}{1!} e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t}(\lambda t + 1) \; \ldots \; +(\;)' = e^{-\lambda t}\{-\lambda^2 t - \lambda + \lambda\} = -\lambda^2 t e^{-\lambda t}.$$

• Zbytek indukce: Nechť
$$\mathbb{P}(T_{n-1}>t)=\int_t^\infty \lambda^{n-1}e^{-\lambda s}\frac{s^{n-2}}{(n-2)!}ds$$
Pak
$$\mathbb{P}(T_n>t)=\mathbb{P}(T_n>t\geq T_{n-1})+\mathbb{P}(T_{n-1}>t)$$
$$=\mathbb{P}(N_t=n-1)+\mathbb{P}(T_{n-1}>t)$$
$$=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}+\lambda\int_t^\infty e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^{n-2}}{(n-2)!}ds$$
$$=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{\lambda}{(n-2)!}\left\{\left[\underset{u}{e^{-\lambda s}}\underset{v}{\frac{(\lambda s)^{n-1}}{\lambda(n-1)}}\right]_t^\infty-\int_t^\infty(-\lambda)e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^{n-1}}{\lambda(n-1)}ds\right\}$$
$$=\lambda\int_t^\infty e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^{n-1}}{(n-1)!}ds. \qquad \boxtimes$$

Dále můžeme definovat
$$\tau_k:=T_{k+1}-T_k$$
časy čekání na $k+1$-událost, tedy doby stávání na hladině $\{N_t=k\}$. Pak jsou nezávislé identicky rozdělené náhodné veličiny s exp. rozdělením s parametrem $\lambda>0$.

Důkaz: • $i=0$ … $\mathbb{P}(\tau_0>s)=\mathbb{P}(T_1-T_0>s)=\mathbb{P}(T_1>s)=\mathbb{P}(N_s=0)=e^{-\lambda s}$.

• vyšší i: "heuristický postup":
$$\mathbb{P}(\tau_i>s)=\mathbb{P}(T_{i+1}-T_i>s)=\mathbb{P}(N_{T_i+s}-\overset{=i}{\widetilde{N_{T_i}}}=0)=\mathbb{P}(N_s=0)=e^{-\lambda s}$$
… posun o "nekonstantní čas"!

• $\mathbb{P}(\tau_i>s)=\int_0^\infty \underbrace{\mathbb{P}(\tau_i>s\mid T_i=t)}_{=\lim_{h\to0^+}\mathbb{P}(\tau_i>s\mid t-h<T_i\leq t)}dF_i(t)$ … F_i distr. funkce T_i

$=\mathbb{P}(\underbrace{N_{t+s}-N_t=0}_{\text{závisí jen na }(N_u)_{u\geq t}}\mid\underbrace{T_i=t}_{\text{závisí jen na }(N_u)_{0\leq u\leq t}})$

$=\mathbb{P}(N_s=0)$ … $\mathbb{P}(\tau_i>s)=\int_0^\infty\mathbb{P}(N_s=0)dF_i(t)=\mathbb{P}(N_s=0)=e^{-\lambda s}$.

7.2. Markovovy řetězce se spojitým časem

Nechť S je spočetná. Pak proces $(X_t)_{t\geq 0}$ se nazývá Markovský, pokud splňuje

$$\forall\, 0<s_1<s_2<\dots<s_{n-1}<s<t \text{ a } \forall\, i_0, \dots, i_n \in S \text{ je } \atop j\in S$$

$$\mathbb{P}(X_t=j \mid X_s=i_n, X_{s_{n-1}}=i_{n-1}, \dots, X_{s_1}=i_1, X_0=i_0) = \mathbb{P}(X_t=j \mid X_s=i_n)$$

… má-li podm. pravd. smysl

… Vývoj po čase $t>s$ tedy opět závisí jen na X_s.

Každý proces s nezávislými přírůstky splňuje Markovovu vlastnost: ($S\subset\mathbb{R}$)

$$\mathbb{P}(X_t=j \mid X_s=i_n, X_{s_{n-1}}=i_{n-1}, \dots, X_{s_1}=i_1, X_0=i_0) =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X_t=j, X_s=i_n, X_{s_{n-1}}=i_{n-1}, \dots, X_{s_1}=i_1, X_0=i_0)}{\mathbb{P}(X_s=i_n, X_{s_{n-1}}=i_{n-1}, \dots, X_{s_1}=i_1, X_0=i_0)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X_t-X_s=j-i_n, X_s-X_{s_{n-1}}=i_n-i_{n-1}, \dots, X_{s_2}-X_{s_1}=i_2-i_1, X_{s_1}-X_0=i_1-i_0, X_0=i_0)}{\mathbb{P}(X_s-X_{s_{n-1}}=i_n-i_{n-1}, \dots, X_{s_1}-X_0=i_1-i_0, X_0=i_0)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X_t-X_s=j-i_n)\mathbb{P}(X_s-X_{s_{n-1}}=i_n-i_{n-1})\dots\mathbb{P}(X_{s_1}-X_0=i_1-i_0)\mathbb{P}(X_0=i_0)}{\dots\dots}$$

$$= \mathbb{P}(X_t-X_s=j-i_n) = \frac{\mathbb{P}(X_t-X_s=j-i_n)\mathbb{P}(X_s=i_n)}{\mathbb{P}(X_s=i_n)} = \frac{\mathbb{P}(X_t-X_s=j-i_n \,\&\, X_s=i_n)}{\mathbb{P}(X_s=i_n)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X_t=j \,\&\, X_s=i_n)}{\mathbb{P}(X_s=i_n)} = \mathbb{P}(X_t=j \mid X_s=i_n).$$

Tedy $\varphi_i(t) = \mathbb{P}(\tau_{i,i+1} > t \mid X_0^b = i) = e^{-\lambda_i t}$. $\quad = \int_t^\infty \lambda_i e^{-\lambda_i s} ds$

• Dále $\mathbb{E}[\tau_{i,i+1} \mid X_0^b = i] = \int_0^\infty \underset{u}{t} \underset{v'}{\lambda_i e^{-\lambda_i t}} dt =$

$$= \lambda_i \left\{ \left[t \frac{e^{-\lambda_i t}}{-\lambda_i} \right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda_i t}}{-\lambda_i} dt \right\} = \int_0^\infty e^{-\lambda_i t} dt = \left[\frac{e^{-\lambda_i t}}{-\lambda_i} \right]_0^\infty = \frac{1}{\lambda_i}.$$

• Opět lze ukázat, že $(\tau_{j,j+1})_{j \geq i}$ jsou nezávislé proměnné s par. $(\lambda_j)_{j \geq i}$.

Procesy zániku (= Death process) je proces $(X_t^d)_{t \geq 0}$ s

$$\mathbb{P}(X_{t+h}^d - X_t^d = -1 \mid X_t^d = i) \simeq \mu_i h, \; h \searrow 0, \; i \in S \quad \text{a}$$
$$\mathbb{P}(X_{t+h}^d - X_t^d = 0 \mid X_t^d = i) \simeq 1 - \mu_i h, \; h \searrow 0, \; i \in S.$$

Označme-li $\tau_{i,i-1}$ čas ve stavu i před přechodem do $i-1$, pak $(\tau_{j,j-1})_{j \leq i}$ je opět posl. nez. náh. veličin s exp. rozdělením s parametry μ_j, $j \leq i$. Tedy $\mathbb{P}(\tau_{j,j-1} > t) = e^{-\mu_j t}$, $t \geq 0$, a $\mathbb{E}[\tau_{i,i-1}] = \frac{1}{\mu_i}$.

Pokud $(N_t)_{t \geq 0}$ je Poissonův proces, pak $(-N_t)_{t \geq 0}$ je proces zániku s $\mu_n = \lambda > 0$, $n \geq 0$.

Procesy zrodu (vzniku) a zániku:
$$\mathbb{P}(X_{t+h} - X_t = 1 \mid X_t = i) \simeq \lambda_i h$$
$$\mathbb{P}(X_{t+h} - X_t = -1 \mid X_t = i) \simeq \mu_i h \qquad h \searrow 0, \; i \in S.$$
$$\mathbb{P}(X_{t+h} - X_t = 0 \mid X_t = i) \simeq 1 - (\lambda_i + \mu_i) h$$

intenzity $\lambda_i \geq 0$, $\mu_i \geq 0$.

Proces vzniku a zániku lze vytvořit jako

$$X_t = X_t^b + X_t^d, \quad t \geq 0$$

- Cvičení: Má-li (X_t^b) intenzity λ_i, a (X_t^d) intenzity μ_i, jaké intenzity má $(X_t)_{t\geq 0}$

- Cvičení: τ_i .. čas strávený na hladině i, před přechodem k $i-1$, nebo $i+1$.

  $\tau_i = \min(\tau_{i,i+1}; \tau_{i,i-1})$ má exp. rozdělení s par. $\lambda_i+\mu_i$.

  tedy $E[\tau_i] = \dfrac{1}{\lambda_i+\mu_i}$.

Ovšem ne každý proces se spojitým časem a Markovovou vlastností -48-
má nezávislé přírůstky!

Procesy zrodu (Birth process): Řetězec $(X_t^b)_{t\geq 0}$ s

$$\mathbb{P}(X_{t+h}^b - X_t^b = 1 \mid X_t^b = i) \simeq \lambda_i h,\ h \searrow 0,\ i \in S \text{ a}$$

$$\mathbb{P}(X_{t+h}^b - X_t^b = 0 \mid X_t^b = i) \simeq 1 - \lambda_i h,\ h \searrow 0,\ i \in S.$$

se nazývá procesem zrodu s $(\lambda_i)_{i\in S}$, $\lambda_i \geq 0$

Poissonův proces je speciální případ pro $\lambda_n = \lambda, > 0$, $n \in \mathbb{N}_0$.

- Doby čekání $\tau_{i,i+1}$ na $i+1$ událost mají opět exp. rozdělení:

$$\frac{\varphi_i(t+h)}{\varphi_i(t)} = \frac{\mathbb{P}(\tau_{i,i+1} > t+h \mid X_0^b = i)}{\mathbb{P}(\tau_{i,i+1} > t \mid X_0^b = i)} = \frac{\mathbb{P}(X_{t+h}^b = i \mid X_0^b = i)}{\mathbb{P}(X_t^b = i \mid X_0^b = i)} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X_{t+h}^b = i \,\&\, X_0^b = i)}{\mathbb{P}(X_t^b = i \,\&\, X_0^b = i)} = \frac{\mathbb{P}(X_{t+h}^b = i \,\&\, X_t^b = i \,\&\, X_0^b = i)}{\mathbb{P}(X_t^b = i \,\&\, X_0^b = i)} =$$

$$= \mathbb{P}(X_{t+h}^b = i \mid X_t^b = i \,\&\, X_0^b = i) = \mathbb{P}(X_{t+h}^b = i \mid X_t^b = i) \simeq 1 - \lambda_i h,\ h \searrow 0.$$

... nezávislost na t: Bezpamětovost Markova procesu

- Tedy $$\frac{\mathbb{P}(\tau_{i,i+1} > t+h \mid X_0^b = i) - \mathbb{P}(\tau_{i,i+1} > t \mid X_0^b = i)}{\mathbb{P}(\tau_{i,i+1} > t \mid X_0^b = i)} = \frac{\varphi_i(t+h) - \varphi_i(t)}{\varphi_i(t)} \simeq -\lambda_i h$$

$$\frac{\varphi_i(t+h) - \varphi_i(t)}{h} \cdot \frac{1}{\varphi_i(t)} \simeq -\lambda_i$$

$$\frac{\varphi_i'(t)}{\varphi_i(t)} = \left[\log \varphi_i(t)\right]' \quad \dots \quad \frac{d}{dt}\left[\log(\varphi_i(t))\right] = -\lambda_i$$

7.3. Semigrupa matic přechodu

Pro trajektorie Markovského řetězce se spojitým časem $(X_t)_{t\geq 0}$ jsou tedy zásadní pravděpodobnosti přechodu

$$P_{ij}(t) = \mathbb{P}(X_{t+s}=j \mid X_s=i), \quad i,j\in S,\ s,t\in\mathbb{R}_+$$

... nezávislé na s (= homogenní řetězec)

- $P(t) = \left[P_{ij}(t)\right]_{i,j\in S}$
- $P(0) = Id$
- $$\left[P_{ij}(t)\right]_{i,j\in S} = \begin{bmatrix} \cdots & P_{-1,-1}(t) & P_{-1,0}(t) & P_{-1,1}(t) & \cdots \\ \cdots & P_{0,-1}(t) & P_{0,0}(t) & P_{0,1}(t) & \cdots \\ & \vdots & \vdots & & \end{bmatrix}$$
- Opět platí $\sum_{j\in S} P_{ij}(t) = \sum_{j\in S} \mathbb{P}(X_t=j \mid X_0=i) = 1, \quad i\in S$

  ... součet řádku je $\equiv 1$.

- Např. pro Poissonův proces je

$$P_{ij}(t) = \mathbb{P}(N_{s+t}=j \mid N_s=i) = \frac{\mathbb{P}(N_{s+t}=j \,\&\, N_s=i)}{\mathbb{P}(N_s=i)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(N_{s+t}-N_s=j-i \,\&\, N_s=i)}{\mathbb{P}(N_s=i)} = \mathbb{P}(N_{s+t}-N_s=j-i) = \begin{cases} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}, & j\geq i \\ 0, & j<i \end{cases}$$

Tedy
$$\left[P_{ij}(t)\right]_{i,j\geq 0} = \begin{bmatrix} e^{-\lambda t}, & \lambda t e^{-\lambda t}, & \frac{\lambda^2 t^2}{2}e^{-\lambda t}, & \cdots \\ 0, & e^{-\lambda t}, & \lambda t e^{-\lambda t}, & \cdots \\ & & \ddots & \end{bmatrix}$$

• Chapman - Kolmogorov rovnice

$$P_{ij}(t+s) = \mathbb{P}(X_{t+s}=j \mid X_0=i) = \sum_{l\in S}' \mathbb{P}(X_{t+s}=j, X_s=l \mid X_0=i)$$

$$= \sum_{l\in S}' \frac{\mathbb{P}(X_{t+s}=j, X_s=l, X_0=i)}{\mathbb{P}(X_s=l, X_0=i)} \cdot \frac{\mathbb{P}(X_s=l, X_0=i)}{\mathbb{P}(X_0=i)}$$

$$= \sum_{l\in S}' \mathbb{P}(X_{t+s}=j \mid X_s=l) \cdot \mathbb{P}(X_s=l \mid X_0=i) = \sum_{l\in S}' P_{il}(s) P_{lj}(t)$$

$$= [P(s)P(t)]_{ij} \quad \dots \quad P(t+s) = P(s)P(t) \dots = P(t)P(s).$$

... vlastnost semigrupy.

7.4. Generátor semigrupy $(P(t))_{t\geq 0}$

Existuje-li následující limita, lze psát

$$P'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{P(t+h)-P(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{P(t)P(h)-P(t)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} P(t)\left[\frac{P(h)-Id}{h}\right] = P(t)\, Q, \text{ kde}$$

$$Q := P'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{P(h)-P(0)}{h}.$$

Q se nazývá generátor semigrupy $(P(t))_{t\geq 0}$.

Pro $Q = [\lambda_{ij}]_{i,j\in S}$ pak platí pro každé $i\in S$:

$$\sum_{j\in S} \lambda_{ij} = \sum_{j\in S}' P_{ij}'(0) = \frac{d}{dt}\left[\sum_{j\in S}' P_{ij}(t)\right]_{t=0} = \frac{d}{dt}\mathbb{1} = 0.$$

... součet řádku Q je $\equiv 1$.

Rovnice $P'(t)=P(t)Q,\ t>0$ je "dopředná Kolmogorova rovnice"

Stejně lze získat $P'(t)=QP(t)$ ... "zpětná Kolmogorova rovnice"

Tyto rovnice lze řešit buď pomocí exponenciely matice (operátoru):

- $\exp(tQ)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(tQ)^m}{m!}=Id+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{t^m}{m!}Q^m$, $P(t):=P(0)\exp(tQ)=\exp(tQ)$, $t\geq 0$
- nebo jako systém diferenciálních rovnic

Pro $h\to 0$ je $P(h)=Id+hQ+o(h)$

a tedy $\mathbb{P}(X_{t+h}=j\,|\,X_t=i)=P_{ij}(h)\simeq\begin{cases}\lambda_{ij}h, & i\neq j,\ h\searrow 0\\ 1+\lambda_{ii}h, & i=j,\ h\searrow 0\end{cases}$

Cvičení: Pro dvoustavový řetězec $Q=\begin{bmatrix}-\alpha & \alpha\\ \beta & -\beta\end{bmatrix}$, $\alpha,\beta\geq 0$

- Napište dopřednou Kolmogorovu rovnici
- Najděte $\exp(tQ)$, $P(t)$, $\lim_{t\to\infty}P(t)$
- Najděte limitní rozložení $\pi=(\pi_0,\pi_1)$
- Kapitola 10.5 & Prop. 10.2.

Podobně jako v případě Poissonova procesu je

$$\mathbb{P}(\tau_{ij} > t) = e^{-\lambda_{ij} t}, \ t > 0 \dots \quad \tau_{ij} \dots \text{doba strávená v } i \text{ před přechodem do } j.$$

$$\mathbb{E}[\tau_{ij}] = \lambda_{ij} \int_0^\infty t e^{-t\lambda_{ij}} \, dt = \frac{1}{\lambda_{ij}}, \ i \neq j$$

Pro τ_i … čas strávený ve stavu i před odchodem do jakéhokoliv stavu různého od i:

$$\tau_i := \min_{j \in S, j \neq i} \tau_{ij}$$

… τ_i je exp. náhodná proměnná s $\sum_{j \neq i} \lambda_{ij}$:

$$\mathbb{P}(\tau_i > t) = \mathbb{P}\Big(\min_{j \in S, j \neq i} \tau_{ij} > t\Big) = \prod_{j \in S, j \neq i} \mathbb{P}(\tau_{ij} > t) = \exp\Big(-t \sum_{j \neq i} \lambda_{ij}\Big) = e^{t\lambda_{ii}};$$

a tedy $\mathbb{E}[\tau_i] = +\dfrac{1}{\sum_{j \neq i} \lambda_{ij}} = -\dfrac{1}{\lambda_{ii}}$;

Příklady: Poissonův proces:
$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 \\ \vdots & & & \ddots \end{bmatrix}$$

Proces zrodu (vzniku)
$$Q = [\lambda_{ij}]_{i,j \in \mathbb{N}_0} = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & \\ 0 & -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 \\ \vdots & 0 & -\lambda_2 & \dots \end{bmatrix}$$

Proces zániku … $S = -\mathbb{N}_0$,
$$Q = \begin{bmatrix} \dots & 0 & \mu_0 & -\mu_0 \\ \vdots & \mu_1 & -\mu_1 & 0 \\ \vdots & -\mu_2 & 0 & \dots \end{bmatrix}$$

Proces vzniku a zániku na $\{0,1,\dots,N\}$

$$Q=[\lambda_{ij}]_{0\le i,j\le N}=\begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & & 0 \\ \mu_1 & -\lambda_1-\mu_1 & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & & & \\ \dots & & 0 & \mu_{N-1} & -\lambda_{N-1}-\mu_{N-1} & \lambda_{N-1} \\ \dots & & 0 & 0 & \mu_N & -\mu_N \end{bmatrix}$$

pro $\mu_0=\lambda_N=0$

Pak $\mathbb{P}(\tau_i>t)=e^{-t(\lambda_i+\mu_i)}$, $t\ge 0$

$$E[\tau_i]=\frac{1}{\lambda_i+\mu_i}$$

7.6. Limitní & Stacionární rozdělení

$\pi=[\pi_i]_{i\in S}$ je stacionární pro $P(t)$, pokud
$$\pi P(t)=\pi,\quad t\ge 0.$$ – tedy pro všechna $t\ge 0$ současně

Věta: Rozdělení π je stacionární, právě když $\pi Q=0$.

Důkaz: Pro $\pi Q=0$ platí $\pi P(t)=\pi\exp(tQ)=\pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}Q^n=$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\pi Q^n=\pi.$$

Naopak, $\pi Q=\pi P'(0)=\pi\lim_{h\searrow 0}\frac{P(h)-P(0)}{h}=0$ pro stacionární π.

Věta: Nechť S je konečná a nechť existuje limitní rozložení
$$\pi_j:=\lim_{t\to+\infty}\mathbb{P}(X_t=j\mid X_0=i)=\lim_{t\to+\infty}P_{ij}(t),\ j\in S$$
nezávislé na $i\in S$. Pak $\pi Q=0$, tedy π je stacionární.

Důkaz: Vyjádříme $\lim\limits_{t\to+\infty} P'(t)$:

- Z dopředné Kolmogorovy rovnice je $\lim\limits_{t\to\infty} P'(t) = \lim\limits_{t\to\infty} \left(P(t)Q\right)$

$$= \begin{bmatrix} -\pi- \\ \vdots \\ -\pi- \end{bmatrix} Q$$

- Protože ale $P(t) = P(0) + \int_0^t P'(s)\,ds$ a $P'(t)$ konvergují pro $t \to +\infty$, musí být $P'(t) \to 0$ ... tedy $\pi Q = 0$. $\blacksquare$

- Využili jsme toho, že

$$\lim_{t\to+\infty} P(t) = \begin{bmatrix} \lim\limits_{t\to+\infty} P_{0,0}(t), & \dots, & \lim\limits_{t\to+\infty} P_{0,m}(t) \\ \vdots & & \\ \lim\limits_{t\to+\infty} P_{m,0}(t), & \dots, & \lim\limits_{t\to+\infty} P_{m,m}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_0 & \dots & \pi_m \\ \vdots & & \vdots \\ \pi_0 & \dots & \pi_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi \\ \vdots \\ \pi \end{bmatrix}.$$

- $\pi Q = 0$ je ekvivalentní $\pi = \pi(Id + hQ)$, $h > 0$

... tedy stacionární rozdělení $P(h) \simeq Id + hQ$, h malé.

Příklady: Proces zrodu a zániku (na N_0)

$$Q = [\lambda_{ij}]_{i,j\geq 0} = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & \dots & \\ \mu_1 & -\lambda_1-\mu_1 & \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & \mu_2 & -\lambda_2-\mu_1 & \mu_2 & \dots \\ & & & \ddots & \end{bmatrix}$$

Limitní distribuce tedy řeší:

$$0 = -\lambda_0\pi_0 + \mu_1\pi_1$$
$$0 = \lambda_0\pi_0 - (\lambda_1+\mu_1)\pi_1 + \mu_2\pi_2$$
$$0 = \lambda_1\pi_1 - (\lambda_2+\mu_2)\pi_2 + \mu_3\pi_3$$
$$\vdots$$
$$0 = \lambda_{j-1}\pi_{j-1} - (\lambda_j+\mu_j)\pi_j + \mu_{j+1}\pi_{j+1}$$

$$\Rightarrow \pi_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0$$

$$\pi_2 = \left[(\lambda_1+\mu_1)\pi_1 - \lambda_0\pi_0\right]/\mu_2 = \left[\frac{\lambda_1+\mu_1}{\mu_2\mu_1}\cdot\lambda_0 - \frac{\lambda_0}{\mu_2}\right]\pi_0 = \frac{\lambda_1\lambda_0}{\mu_2\mu_1}\pi_0$$

$$\vdots$$

$$\pi_{j+1} = \frac{\lambda_j \dots \lambda_0}{\mu_{j+1} \dots \mu_1}\pi_0.$$

π_0 poté obdržíme z $\sum_{j\geq 0}' \pi_j = 1$.

Pro $\lambda_i = \lambda, \mu_i = \mu$ pak $\pi_j = \dfrac{\lambda^j}{\mu^j \sum_{i=0}^{\infty}' (\lambda/\mu)^i} = \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^j \left(1 - \dfrac{\lambda}{\mu}\right)$ ... geom. distr. s λ/μ.

Proces vzniku a zániku na $\{0, 1, \dots, N\}$

... $\lambda_j = 0, j \geq N$; $\mu_j = 0, j \geq N+1$

Střední doba absorbce a pravděpodobnost absorbce

- proces vzniku a zániku, 0 je absorbující ($\lambda_0 = 0$), $S = \{0, \dots, N\}$
- $T_0 = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \mid X_t = 0\}$ ... čas absorbce
- $g_0(k) = \mathbb{P}(T_0 < +\infty \mid X_0 = k)$, $0 \leq k \leq N$
- okr. podmínka $g_0(0) = 1$
- $Z_n := X_{T_n}$; $T_{n+1} = \inf\{t > T_n : X_t \neq X_{T_n}\}$ ... doba změny řetězce

  $\uparrow$ vnořený řetězec s diskr. časem

- Pro proces vzniku a zániku s λ_j, μ_j na $\{0, \dots, N\}$ je

$$\mathbb{P}(X_{t+h} = i+1 \mid X_t = i \text{ a } X_{t+h} - X_t \neq 0) = \frac{\mathbb{P}(X_{t+h} = i+1 \text{ a } X_t = i)}{\mathbb{P}(X_t = i \text{ a } X_{t+h} - X_t \neq 0)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X_{t+h} = i+1 \text{ a } X_t = i)}{\mathbb{P}(X_{t+h} - X_t \neq 0 \mid X_t = i)\,\mathbb{P}(X_t = i)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X_{t+h} = i+1 \mid X_t = i)}{\mathbb{P}(X_{t+h} - X_t \neq 0 \mid X_t = i)} \cong \frac{\lambda_i h}{\lambda_i h + \mu_i h} = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i}, \quad h \to 0$$

- $Z = (Z_n)_{n=0}^{N}$ má matici přechodu pravděp.

$$P = [P_{ij}]_{i,j=0}^{N} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{\mu_1}{\lambda_1+\mu_1} & 0 & \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\mu_1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \frac{\mu_{N-1}}{\lambda_{N-1}+\mu_{N-1}} & 0 & \frac{\lambda_{N-1}}{\lambda_{N-1}+\mu_{N-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Analýza 1. kroku pro Z : "X bude absorbován v 0 <=> Z bude absorb. v 0

$$g_0(k) = \frac{\lambda_k}{\lambda_k+\mu_k} g_0(k+1) + \frac{\mu_k}{\lambda_k+\mu_k} g_0(k-1);\ 1 \le k \le N-1$$

... pro $\lambda_k \equiv \lambda$, $\mu_k \equiv \mu$ ... ruinování hráče ... pro $\lambda_0 = \mu_N = 0$.
$k \neq 0$, $k \neq N$

$$g_0(k) = \frac{(\mu/\lambda)^k - (\mu/\lambda)^N}{1-(\mu/\lambda)^N},\ 0 \le k \le N.$$

- Průměrná doba absorbce - podobně + střední doba přechodu mezi stavy