Markovské procesy

LS 2021/22, FJFI ČVUT

1. Cvičení

Základy pravděpodobnosti

1. (Pravděpodobnostní prostor)
   Ω je množina, která obsahuj všechny možné výsledky náhodného jevu X. Tedy například

   (a) $\Omega = \{O, P\}$ - pro hod mincí
   (b) $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$ - pro hod kostkou
   (c) $\Omega = \mathbb{R}$ - pro náhodnou Gaussovskou proměnnou

   Na prostoru Ω budeme předpokládat zadanou σ-algebru a míru (obvykle značenou $\mathbb{P}$). Událost $A \subset \Omega$ je libovolná (měřitelná) podmnožina Ω. Například $A = \{2,4,6\} \subset \Omega = \{1,2,\ldots,6\}$ je událost "*na kostce padlo sudé číslo.*"

   Součinový prostor: pro opakování nezávislých veličin je nejjednodušší použít součin $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$. Tedy např. $\Omega = \{1,2,\ldots,6\} \times \{1,2,\ldots,6\}$ pro hod dvěma kostkami.

2. (Podmíněná pravděpodobnost)

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}, \quad \text{pokud} \quad \mathbb{P}(B) \neq 0.$$

   Dvě události A, B jsou nezávislé, pokud $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$, tedy pokud $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

3. (Náhodné proměnné) Jsou zobrazení $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Např. pro

$$\Omega = \{1,2,\ldots,6\} \times \{1,2,\ldots,6\} \to \mathbb{R}, \quad X(k,l) = k + l$$

   je X součtem čísel hozených na dvou kostkách. Pro $A \subset \mathbb{R}$ je $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}$ událost, kterou označíme $\{X \in A\}$. *Střední hodnota* (pro Ω spočetnou) je definována jako

$$\mathbb{E}[X] = \sum_k k\mathbb{P}(X = k)$$

   a *podmíněná střední hodnota* jako

$$\mathbb{E}[X|A] = \sum_k k\mathbb{P}(X = k|A).$$

   Rozptyl X je $\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}[X - \mathbb{E}X]^2$.

4. Buď N náhodné celé číslo vygenerované podle Poissonova rozdělení, tedy

$$\mathbb{P}(N = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

   kde $\lambda > 0$ je parametr. Poté provedeme N nezávislých Bernoulliho pokusů, každý s parametrem $p \in (0,1)$, tedy

$$\mathbb{P}(X_j = 1) = p \quad \text{a} \quad \mathbb{P}(X_j = 0) = 1 - p, \quad j = 1, \ldots, N$$

   a označme jako Z počet obdržených jedniček, tedy $Z = \#\{j : X_j = 1\}$. Spočtěte střední hodnotu a rozptyl Z. Najděte rozložení Z.

5. Nechť X, Y jsou dvě nezávislé náhodné veličiny s Poissonovým rozdělením s parametry $\lambda, \mu > 0$. Spočtěte $\mathbb{P}(X = k | X + Y = n)$ pro všechna $k, n \in \mathbb{N}_0$. Dále dokažte, že $X + Y$ má Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda + \mu$.

6. V klobouku je červená a zelená kulička. V prvním kole vytáhneme jednu kuličku, poznamenáme si její barvu, vložíme ji zpět, a přidáme ještě do klobouku další kuličku stejné barvy. V druhém kole opět vytáhneme jednu kuličku. Určete pravděpodobnost, že v prvním kole byla vytažena červená kulička, víte-li, že ve druhém kole byla vytažena červená kulička.

7. Stroj spoléhá na funkčnost tří součástek, z nichž každá (nezávisle na ostatních) pracuje správně s pravděpodobností p a s pravděpodobností $1 - p$ je rozbitá. Stroj funguje, pokud fungují alespoň dvě z těchto součástek. Spočtěte pravděpodobnost, že stroj funguje. Dále předpokládejme, že i p je náhodná veličina, rovnoměrně rozdělená v $[0, 1]$. Spočtěte pak pravděpodobnost, že stroj funguje.

8. Pro úlohu ruinování hráče jsme získali formuli pro pravděpodobnost ruinování hráče A při $p \neq q$
$$f_S(k) = \frac{(q/p)^k - (q/p)^S}{1 - (q/p)^S}, \quad 0 \leq k \leq S. \tag{1}$$
Dokažte, že pro $(p, q) \to (1/2, 1/2)$ dostaneme limitu $(S - k)/S$.

9. Ukažte, že tato řešení odpovídají speciálním řešením získaným pro $S = 2$, $S = 3$.

10. Zkuste najít řešení soustavy $f_S(0) = 1 \,\cancel{=}\, , f_S(S) = 0$ a $f_S(k) = p f_S(k+1) + q f_S(k-1)$ pro $1 \leq k \leq S - 1$ pomocí přepisu do
$$p(f_S(k+1) - f_S(k)) = q(f_S(k) - f_S(k-1)).$$

11. Ověřte, že
$$\mathbb{P}(R_A | X_0 = k) + \mathbb{P}(R_B | X_0 = k) = 1, \quad 0 \leq k \leq S.$$

12. Výherní automat je naprogramován na $p = 0.45$. Hráč i automat mají na začátku 100Kč, jedna hra je o 1Kč. Jaká je pravděpodobnost zruinování hráče a zruinování automatu?

13. Popište detaily řešení nehomogenní rovnice $h_S(k) = 1 + p h_S(k+1) + q h_S(k-1)$ s okrajovými podmínkami $h_S(0) = h_S(S) = 0$.

14. Do řešení opět dosaďte $S = 2$ a $S = 3$ a získejte dříve odvozené speciální řešení.

15. Popište řešení pro $p = q = 1/2$ a získejte $h_S(k) = k(S - k) = h_S(S - k)$.

16. Získejte řešení pro $p = q = 1/2$ jako limitu řešení pro $p \neq q$ a $(p, q) \to (1/2, 1/2)$.

Základy pravděpodobnosti

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ pravděpodobnostní prostor
  - často ne příliš užitečný prakticky, spíše teoretický základ
- Zkonstruujte Ω pro minování hráče
- Ω a X pro házení kostkou
- $\Omega = A \cap B$, $A \neq B = \emptyset$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k \geq 0} k\,\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k \geq 0} k\,\mathbb{P}(X=k|A) \cdot \mathbb{P}(A) + \sum_{k \geq 0} k\,\mathbb{P}(X=k|B) \cdot \mathbb{P}(B)$$

$$= \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{E}[X|A] + \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{E}[X|B]$$

– vážený průměr dvou středních hodnot

4, N náhodná, Poisson $\mathbb{P}(N=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $k \in \mathbb{N}_0$, $\lambda > 0$ parametr

$$Z = \sum_{j=1}^{N} X_j, \quad \mathbb{P}(X_j = 1) = p, \quad \mathbb{P}(X_j = 0) = 1-p$$

- $$\mathbb{E} Z = \sum_{k=0}^{\infty} k\,\mathbb{P}(Z=k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \sum_{l=k}^{\infty} \mathbb{P}(Z=k \,\&\, N=l)$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{l} k\,\mathbb{P}(Z=k|N=l) \cdot \mathbb{P}(N=l)$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{P}(N=l) \underbrace{\sum_{k=0}^{l} k \mathbb{P}(Z=k \mid N=l)}_{\mathbb{E}[Z \mid N=l] = l \mathbb{E} X_i = lp} = \sum_{l=0}^{\infty} lp \mathbb{P}(N=l) = p \mathbb{E} N = p\lambda.$$

• $\mathbb{E}[Z^2]$ ... $var(Z) = \mathbb{E}[Z^2] - \underbrace{(\mathbb{E} Z)^2}_{-\lambda^2 p^2}$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \mathbb{P}(Z=k) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \sum_{l=k}^{\infty} \mathbb{P}(Z=k \,\&\, N=l)$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{l} k^2 \mathbb{P}(Z=k \mid N=l) \cdot \mathbb{P}(N=l) = \sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{P}(N=l) \cdot \mathbb{E}[Z^2 \mid N=l]$$

• $\mathbb{E}[X_1 + \ldots + X_l]^2 = \sum_{j=1}^{l} \mathbb{E} X_j^2 + \sum_{j \neq k} \mathbb{E}[X_j \cdot X_k] = lp + l(l-1)p^2$

$$= p \sum_{l=0}^{\infty} l \cdot \mathbb{P}(N=l) - p^2 \sum_{l=0}^{\infty} l \mathbb{P}(N=l) + p^2 \sum_{l=0}^{\infty} l^2 \mathbb{P}(N=l)$$

$$= (p-p^2)\mathbb{E} N + p^2 \mathbb{E} N^2 = (p-p^2)\lambda + p^2 \underbrace{(\lambda+\lambda^2)}_{\mathbb{E} N^2} = p\lambda + p^2\lambda^2$$

$$\Rightarrow var(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - (\mathbb{E} Z)^2 = p\lambda + p^2\lambda^2 - \lambda^2 p^2 = p\lambda.$$

~~4)~~ Rozdělení Z:

$$\mathbb{P}(Z=\ell)=\sum_{k=\ell}^{\infty}\mathbb{P}(Z=\ell \,\&\, N=k)=\sum_{k=\ell}^{\infty}\mathbb{P}(Z=\ell\,|\,N=k)\cdot\mathbb{P}(N=k)$$

$$=\sum_{k=\ell}^{\infty}\binom{k}{\ell}p^{\ell}(1-p)^{k-\ell}\cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=\frac{p^{\ell}e^{-\lambda}}{\ell!}\sum_{k=\ell}^{\infty}\frac{k!}{k!}(1-p)^{k-\ell}\frac{\lambda^k}{(k-\ell)!}$$

$$=\frac{(\lambda p)^{\ell}}{\ell!}e^{-\lambda}\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k\frac{\lambda^k}{k!}}_{e^{(1-p)\lambda}}=e^{-p\lambda}\frac{(\lambda p)^{\ell}}{\ell!}$$ ... Poisson with $p\lambda$

6, C_1 ... barva první kuličky $\qquad \mathbb{P}(C_1=R)=\mathbb{P}(C_1=G)=\frac{1}{2}.$

C_2 ... barva druhé kuličky

$$\mathbb{P}(C_2=R\,|\,C_1=R)=\frac{2}{3},\ \mathbb{P}(C_2=R\,|\,C_1=G)=\frac{1}{3}$$

Máme určit $\mathbb{P}(C_1=R\,|\,C_2=R)=\dfrac{\mathbb{P}(C_1=R\,\&\,C_2=R)}{\mathbb{P}(C_2=R)}$

$$=\frac{\mathbb{P}(C_2=R\,|\,C_1=R)\cdot\mathbb{P}(C_1=R)}{\mathbb{P}(C_2=R\,|\,C_1=R)\cdot\mathbb{P}(C_1=R)+\mathbb{P}(C_2=R\,|\,C_1=G)\cdot\mathbb{P}(C_1=G)}$$

$$=\frac{2/3\cdot 1/2}{2/3\cdot 1/2+1/3\cdot 1/2}=\frac{2/6}{2/6+1/6}=\frac{2}{3}.$$

7, $\bullet\ \mathbb{P}(X \geq 2) = \binom{3}{2} p^2(1-p) + p^3 = 3p^2 - 2p^3$

$\bullet \int_0^1 (3p^2 - 2p^3)\,dp = \frac{1}{2}.$

8, $$f_S(k) = \frac{q^k \cdot p^{S-k} - q^S}{-q^S + p^S} = \frac{p^{S-k}(1-p)^k - (1-p)^S}{p^S - (1-p)^S} \quad \begin{matrix} \to 0 \\ \text{pro } p \to 1/2. \\ \to 0 \end{matrix}$$

$$\text{l'H:} \quad \frac{(S-k)p^{S-k-1}(1-p)^k + p^{S-k}k(1-p)^{k-1}\cdot(-1) - (1-p)^{S-1}\cdot S\cdot(-1)}{Sp^{S-1} - S(1-p)^{S-1}(-1)}$$

$$\ldots \frac{(S-k)(1/2)^{S-1} + (1/2)^{S-1}\cdot(-k) + (1/2)^{S-1}\cdot S}{S(1/2)^{S-1} + S(1/2)^{S-1}} = \frac{2(S-k)}{2S} = \frac{S-k}{S}$$

9, dokázáno

10, $f_S(0) = 1,\ f_S(S) = 0 \qquad p(f_S(k+1) - f_S(k)) = q(f_S(k) - f_S(k-1)),\ 1 \leq k \leq S-1$

$$u_k = f_S(k+1) - f_S(k) \ldots \quad p u_k = q u_{k-1},\ 1 \leq k \leq S-1$$

$$u_0 + \ldots + u_{S-1} = -1 \qquad \ldots u_1 = \frac{q}{p} u_0, \ldots, u_j = \left(\frac{q}{p}\right)^j u_0$$

$$u_0 \left(1 + \left(\frac{q}{p}\right) + \ldots + \left(\frac{q}{p}\right)^{S-1}\right) = -1$$

$$u_0 \frac{1 - (q/p)^S}{1 - q/p} = -1 \quad \ldots u_0 = -\frac{1 - q/p}{1 - (q/p)^S},\ u_j = \left(\frac{q}{p}\right)^j \cdot u_0$$

$$f_S(k) = f_S(0) + u_0 + \ldots + u_{k-1} = 1 - \frac{1 - q/p}{1 - (q/p)^S} \cdot \left\{1 + \frac{q}{p} + \ldots + \left(\frac{q}{p}\right)^{k-1}\right\}$$

$$= 1 - \frac{1 - q/p}{1 - (q/p)^S} \cdot \frac{1 - (q/p)^k}{1 - q/p} = \frac{1 - (q/p)^S - 1 + (q/p)^k}{1 - (q/p)^S} = \frac{(q/p)^k - (q/p)^S}{1 - (q/p)^S}.$$

$p = q = 1/2 \ldots u_k = u_{k-1} \ldots u_0 + \ldots + u_{S-1} = -1 \ldots u_j = -1/S$

$$f_S(k) = 1 + u_0 + \ldots + u_{k-1} = 1 - k/S.$$

11, $$\mathbb{P}(R_A \mid X_0 = k) + \mathbb{P}(R_B \mid X_0 = k) = \frac{(q/p)^k - (q/p)^S}{1-(q/p)^S} + \frac{(p/q)^{S-k} - (p/q)^S}{1-(p/q)^S}$$

$$= \frac{p^S (q/p)^k - (q/p)^S \cdot p^S}{p^S - q^S} + \frac{(p/q)^{S-k} \cdot q^S - (p/q)^S \cdot q^S}{q^S - p^S}$$

$$= \frac{p^{S-k} q^k - q^S - p^{S-k} q^k + p^S}{p^S - q^S} = \frac{p^S - q^S}{p^S - q^S} = 1$$

12, dosazením

5, $$\mathbb{P}(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k \,\&\, Y=n-k) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n-k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda-\mu} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} = e^{-\lambda-\mu} \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}$$

13, $h_S(0)=h_S(S)=0$, $h_S(k)=1+p\,h_S(k+1)+q\,h_S(k-1)$ $1\le k\le S-1$

homogenní rovnice $h_S^1(k)=p\,h_S^1(k+1)+q\,h_S^1(k-1)$

$$q[h_S^1(k)-h_S^1(k-1)]=p[h_S^1(k+1)-h_S^1(k)]$$

$u_k=h_S^1(k+1)-h_S^1(k)$ ... $u_k=\frac{q}{p}u_{k-1}$, $u_j=\left(\frac{q}{p}\right)^j u_0$

$$h_S^1(k)=h_S^1(0)+u_0+\ldots+u_{k-1}=h_S^1(0)+u_0\left(1+\frac{q}{p}+\ldots+\left(\frac{q}{p}\right)^{k-1}\right)$$

$$=h_S^1(0)+u_0\cdot\frac{1-(q/p)^k}{1-(q/p)}=C_1+C_2\cdot(q/p)^k$$

nehomogenní: $C\cdot k$ $\quad Ck=1+p\,C(k+1)+q\,C(k-1)$

$$Ck=1+pCk+pC+qCk-qC \ \ldots \ C=-\frac{1}{p-q}=\frac{1}{q-p}$$

Obecné řešení $h_S(k)=C_1+C_2(q/p)^k+\frac{k}{q-p}$

$$h_S(0)=0=C_1+C_2$$

$$h_S(S)=0=C_1+C_2(q/p)^S+\frac{S}{q-p} \qquad 0=C_2\left[(q/p)^S-1\right]+\frac{S}{q-p}$$

$$C_2=-C_1=\frac{-S/(q-p)}{(q/p)^S-1}=\frac{S}{(q-p)(1-(q/p)^S)}$$

$$h_S(k)=\frac{1}{q-p}\left\{k-\frac{S(1-(q/p)^k)}{1-(q/p)^S}\right\}$$

14, doprocvičení

15, $p = q = \frac{1}{2}$ $\quad u_k = u_{k-1} = u_0$

$$h_S^1(k) = h_S^1(0) + k \cdot u_0 = C_1 + k \cdot C_2$$

$$h_S^2(k) = C \cdot k^2 \,?$$

$$C k^2 = 1 + p\,C(k+1)^2 + q\,C(k-1)^2$$

$$\cancel{C k^2} = 1 + \frac{C}{2}\left[\cancel{k^2} + \cancel{2k} + 1\right] + \frac{C}{2}\left[k^2 - \cancel{2k} + 1\right]$$

$$0 = 1 + C \;\ldots\; C = -1 \;\ldots\; h_S^2(k) = -k^2$$

$$h_S(k) = C_1 + k C_2 - k^2$$

$$k = 0 \ldots h_S(0) = 0 \ldots C_1 = 0$$

$$k = S \ldots h_S(S) = C_2 \cdot S - S^2 = 0 \ldots C_2 = S$$

$$h_S(k) = k(S-k)$$

16, $$h_S(k) = \frac{k\left(1-(q/p)^S\right) - S\left(1-(q/p)^k\right)}{(q-p)\left(1-(q/p)^S\right)} \quad \ldots\; r = q/p \to 1$$

$$= \frac{k(1-r^S) - S(1-r^k)}{p(r-1)(1-r^S)} = \frac{k[1+r+\ldots+r^{S-1}] - S[1+r+\ldots+r^{k-1}]}{-p(1-r^S)}$$

l'H: $$\frac{k[1+2r+\ldots+(S-1)r^{S-2}] - S[1+2r+\ldots+(k-1)r^{k-2}]}{-p\{-S r^{S-1}\}}$$

$r = 1$: $$\frac{k[1+2+\ldots+(S-1)] - S[1+\ldots+(k-1)]}{S \cdot \frac{1}{2}} = \frac{k\frac{(S-1)\cancel{S}}{2} - \cancel{S}\frac{k(k-1)}{2}}{\cancel{S}\,\frac{1}{2}}$$

$$\frac{kS - k - k^2 + k}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{kS - k^2}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{k(S-k)}{2 \cdot \frac{1}{2}} = k(S-k).$$