Markovské procesy

LS 2021/22, FJFI ČVUT

2. Cvičení

Ruinování hráče

1. Uvažujme problém ruinování hráče s možností remízy. Při celkovém počtu S mincí a pokud X_n je majetek hráče A po n kolech hry, tak se v $n+1$ kole majetek A zvýší o 1 s pravděpodobností $r \in (0, 1/2]$, sníží o 1 s toutéž pravděpodobností, a zůstane stejný s pravděpodobností $1-2r$. Označme

$$f(k) := \mathbb{P}(R_A | X_0 = k)$$

pravděpodobnost ruinování hráče A a nechť

$$h(k) := \mathbb{E}[T_{0,S} | X_0 = k]$$

je střední doba hry při startu v $X_0 = k$, $0 \leq k \leq S$.

   (a) Použitím analýzy prvního kroku napište diferenční rovnici pro $f(k)$ a příslušné okrajové podmínky. Těmto rovnicím budeme říkat *homogenní rovnice.*

   (b) Vyřešte rovnice z bodu (a). Odpovídá řešení Vaší intuici?

   (c) Užitím analýzy prvního kroku napište diferenční rovnici pro $h(k)$ a příslušné okrajové podmínky.

   (d) Najděte řešení rovnic z bodu (c); bude se jednat o součet homogenního a partikulárního řešení.

   (e) Najděte limitu střední doby hry pro $r \to 0$.

2. Uvažujme proces ruinování hráče, při kterém se hráč může vrátit do hry i když už jeho majetek klesl na nulu. Konkrétně, pro $S \in \mathbb{N}$ je

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k+1 | X_n = k) = p, \quad 0 \leq k \leq S-1,$$
$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k-1 | X_n = k) = q = 1-p, \quad 1 \leq k \leq S-1,$$
$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 0 | X_n = 0) = q, \quad \mathbb{P}(X_{n+1} = S | X_n = S) = 1.$$

Konečně označme

$$W = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{X_n = S\}$$

událost vítězství hráče A.

   (a) Interpretujte tento model jako "kasina pro děti" a "hlemýždě lezoucího na větev ve výšce S".

   (b) Nechť $f(k) = \mathbb{P}(W | X_0 = k)$ je pravděpodobnost, že hráč zvítězí (tedy dosáhne v nějakém čase $n \in \mathbb{N}_0$ stavu $X_n = S$) při startu v $X_0 = k$. Napište diferenční rovnici pro $f(k)$ a okrajové podmínky.

(c) Spočtěte $\mathbb{P}(W|X_0 = k)$ pro všechna $k = 0, 1, \ldots, S$ řešením rovnic z (a).

(d) Nechť $T_S = \inf\{n \geq 0 : X_n = S\}$ je čas prvního dosažení stavu S a nechť $g(k) = \mathbb{E}[T_S|X_0 = k]$ je střední délka hry. Napište diferenční rovnice pro $g(k)$.

(e) Spočtěte $g(k)$ z rovnic v (d).

(f) Nechť $T_0 = \inf\{n \geq 0 : X_n = 0\}$ je čas prvního dosažení nulové hladiny. Napište $p_k := \mathbb{P}(T_S < T_0|X_0 = k)$ jako funkce p, S a $k \in \{0, 1, \ldots, S\}$.

(g) Zdůvodněte (stačí slovně) identitu $(0 < k \leq S - 1)$

$$\mathbb{P}(T_S < T_0|X_1 = k + 1, X_0 = k) = \mathbb{P}(T_S < T_0|X_1 = k + 1) = \mathbb{P}(T_S < T_0|X_0 = k + 1).$$

(h) Ukažte, že

$$\mathbb{P}(X_1 = k+1|X_0 = k, T_S < T_0) = p\frac{\mathbb{P}(T_S < T_0|X_0 = k + 1)}{\mathbb{P}(T_S < T_0|X_0 = k)} = p\frac{p_{k+1}}{p_k}, \quad 1 \leq k \leq S-1.$$

(i) Podobně spočtěte $\mathbb{P}(X_1 = k - 1|X_0 = k, T_0 < T_S)$, $1 \leq k \leq S$.

(j) Pro $h(k) = \mathbb{E}[T_S|X_0 = k, T_S < T_0]$, $k = 1, \ldots, S$ je střední doba hry za předpokladu, že stavu 0 není nikdy dosaženo. Napište diferenční rovnice pro h a vyřešte je pro $p = 1/2$.

1a, $f(k) = \mathbb{P}(R_A | X_0 = k)$

$= \mathbb{P}(X_1 = k+1 | X_0 = k) \cdot \mathbb{P}(R_A | X_0 = k+1)$

$+ \mathbb{P}(X_1 = k-1 | X_0 = k) \cdot \mathbb{P}(R_A | X_0 = k-1)$

$+ \mathbb{P}(X_1 = k | X_0 = k) \cdot \mathbb{P}(R_A | X_0 = k)$

$\Rightarrow f(k) = r f(k+1) + (1-2r) f(k) + r f(k-1)$; $f(0) = 1, f(S) = 0$

$1 \leq k \leq S-1$

$\Downarrow$

$f(k) = \frac{1}{2} f(k+1) + \frac{1}{2} f(k-1)$

b, ... stejná rovnice jako bez remízy k $p = q = 1/2$, $f(k) = \frac{S-k}{S}$

1c, $h(k) = (1-2r)(1+h(k)) + r(1+h(k+1)) + r(1+h(k-1))$ $\quad 1 \leq k \leq S-1$

$\Rightarrow h(k) = 1 + (1-2r) h(k) + r\, h(k+1) + r\, h(k-1)$

$h(k) = \frac{1}{2r} + \frac{1}{2} h(k+1) + \frac{1}{2} h(k-1)$, $h(0) = h(S) = 0$

1d, partikulární řešení $h^1(k) = Ck^2 \Rightarrow h^1(k) = -\frac{k^2}{2r}$

& $h(k) = C_1 + C_2 k - \frac{k^2}{2r}$ ... $\Rightarrow h(k) = \frac{k}{2r}(S-k)$

1e, $r \to 0$ ... $h(k) \to \infty$ pro $1 \leq k \leq S-1$

1d b1e alternativni

- $\frac{1}{2}(h(k+1)-h(k)) = \frac{1}{2}(h(k)-h(k-1)) - \frac{1}{2r}$, $1 \le k \le S-1$

  $h(0)=h(S)=0$

  $u_k = h(k+1)-h(k)$

  $u_k = u_{k-1} - \frac{1}{r}$ ... $u_k = u_0 - \frac{k}{r}$

- $u_0 + \dots + u_{S-1} = h(S)-h(0) = 0$

  $$S \cdot u_0 + \left(-\frac{0}{r} - \dots - \frac{S-1}{r}\right) = Su_0 - \frac{S(S-1)}{2r} = 0$$

  $$u_0 = \frac{S-1}{2r}$$

- $u_k = u_0 - \frac{k}{r} = \frac{S-1}{2r} - \frac{k}{r}$

- $h(k) = u_{k-1} + \dots + u_0 = \frac{k(S-1)}{2r} - \left(\frac{0}{r} + \dots + \frac{k-1}{r}\right) = \frac{k(S-1)}{2r} - \frac{(k-1)k}{2r}$

  $$= \frac{k}{2r}(S-k).$$

2, a, ✓

b, $f(k) = \mathbb{P}(W | X_0 = k)$

$$f(k) = p f(k+1) + q f(k-1), \quad k = 1, \dots, S-1; \quad f(S) = 1$$

$$f(0) = p f(1) + q f(0)$$

$\dots f(0) = f(1)$ etc.

c, řešení $\dots f \equiv 1 = \mathbb{P}(W | X_0 = k), \; 0 \le k \le S$

d, $T_S = \inf\{n \ge 0 : X_n = S\}$

$g(k) = E[T_S | X_0 = k]$

$$g(k) = 1 + p g(k+1) + q g(k-1), \quad 1 \le k \le S-1$$

$$g(S) = 0$$

$$g(0) = 1 + p g(1) + q g(0)$$

e, $p \neq q$: hom: $g(k) = C_1 + C_2 (q/p)^k$

nehom: $g(k) = \frac{k}{p-q}$ $\quad \Rightarrow g(k) = \frac{k}{q-p} + C_1 + C_2 (q/p)^k$

$g(S) = 0$

$g(0) = \dots$ $\quad \Rightarrow g(k) = \frac{S-k}{p-q} + \frac{q}{(p-q)^2}\left((q/p)^S - (q/p)^k\right)$

$p = q \dots g(k) = -k^2 + C_1 + C_2 k \Rightarrow g(k) = (S+k+1)(S-k)$

f) $T_0 = \inf\{n \geq 0 : X_n = 0\}$ ... první dosažení nuly

$p_k = \mathbb{P}(T_S < T_0 \mid X_0 = k)$ ... $T_0 = +\infty$

$p_0 = 0,\ p_S = 1$

$$p_k = p \cdot p_{k+1} + q \cdot p_{k-1}, \quad 1 \leq k \leq S-1 \qquad \Rightarrow p_k = \frac{k}{S},\ p = q = \frac{1}{2}$$

$$p_k = \frac{1-(q/p)^k}{1-(q/p)^S}$$

g) Pravděpodobnost, že někdy skočíme do nuly nezávisí na 1. kroku, pokud tento nezačínal v nule

h)
$$\mathbb{P}(X_1 = k+1 \mid X_0 = k, T_S < T_0) = \frac{\mathbb{P}(T_S < T_0, X_1 = k+1, X_0 = k)}{\mathbb{P}(X_0 = k, T_S < T_0)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(T_S < T_0 \mid X_1 = k+1, X_0 = k)}{\mathbb{P}(X_0 = k, T_S < T_0)} \cdot \frac{\mathbb{P}(X_1 = k+1, X_0 = k)}{\mathbb{P}(X_0 = k)} \cdot \mathbb{P}(X_0 = k)$$

$$= \frac{\mathbb{P}(T_S < T_0 \mid X_0 = k+1)}{\mathbb{P}(T_S < T_0 \mid X_0 = k)} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(X_1 = k+1 \mid X_0 = k)}_{=p} = p \cdot \frac{p_{k+1}}{p_k} \qquad 1 \leq k \leq S-1$$

$$\overset{p \neq q}{=} p\, \frac{1-\cancel{p}(q/p)^{k+1}}{1-(q/p)^k} \ ; \ \overset{p=q}{=} \frac{k+1}{2k}$$

i) $\mathbb{P}(X_1=k-1 \mid X_0=k, T_0<T_S) \overset{\text{stąd}}{=} \dfrac{\mathbb{P}(X_1=k-1, X_0=k)}{\mathbb{P}(X_0=k)} \cdot \dfrac{\mathbb{P}(T_0<T_S \mid X_0=k-1)}{\mathbb{P}(T_0<T_S \mid X_0=k)}$

$$= q \cdot \frac{1-p_{k-1}}{1-p_k}$$

j) $h(k) = \mathbb{E}[T_S \mid X_0=k, T_S<T_0]$

$$\mathbb{P}(X_1=k+1 \mid X_0=k, T_S<T_0) = p \cdot \frac{p_{k+1}}{p_k} \qquad (k)$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{P}(T_S=l \mid X_0=k, T_S<T_0) \cdot l$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{P}(T_S=l, X_1=k+1 \mid X_0=k, T_S<T_0) \cdot l + \sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{P}(T_S=l, X_1=k-1 \mid X_0=k, T_S<T_0) \cdot l$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{P}(T_S=l \mid X_1=k+1, X_0=k, T_S<T_0) \cdot l \cdot \frac{\mathbb{P}(X_1=k+1, X_0=k, T_S<T_0)}{\mathbb{P}(X_0=k, T_S<T_0)} + \dots$$

$$\frac{\mathbb{P}(X_1=k-1, X_0=k, T_S<T_0)}{\mathbb{P}(X_0=k, T_S<T_0)} = \mathbb{P}(X_1=k-1 \mid X_0=k, T_S<T_0) = 1-\mathbb{P}(X_1=k+1 \mid X_0=k, T_S<T_0) = 1-p \cdot \frac{p_{k+1}}{p}$$

$$= \mathbb{E}[T_S \mid X_1=k+1, X_0=k, T_S<T_0] \cdot \underbrace{\mathbb{P}(X_1=k+1 \mid X_0=k, T_S<T_0)}_{p \cdot \frac{p_{k+1}}{p_k}} + \dots$$

$$= \left(1+\mathbb{E}[T_S \mid X_0=k+1, T_S<T_0]\right) \cdot$$

$$\Rightarrow h(k) = (1+h(k+1)) \cdot p \frac{p_{k+1}}{p_k} + (1+h(k-1)) \cdot \left(1-p \frac{p_{k+1}}{p_k}\right)$$

- $p = q = 1/2 \implies h(k) = 1 + p \cdot \frac{p_{k+1}}{p_k} h(k+1) + \left(1 - p\frac{p_{k+1}}{p_k}\right) h(k-1)$

$$= 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{k+1}{k} h(k+1) + \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{k+1}{k}\right) h(k-1)$$

$$\implies k\, h(k) = k + \frac{1}{2}(k+1)\, h(k+1) + \frac{1}{2} \frac{(k-1)}{\cancel{k}} h(k-1)$$

$g(k) = k \cdot h(k)$

$$\ldots\; h(k) = \frac{S^2 - k^2}{3}, \quad k = 1, \ldots, S$$