Markovské procesy

LS 2021/22, FJFI ČVUT

3. Cvičení

---

1. (Poissonovská slepice). Poissonovská slepice Máša naklade N vajec, kde N má Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda > 0$. Protože se kolem Máši pohybuje i kohout Čeněk, tak se z vajec mohou líhnout kuřata. Z vajíčka se vylíhne kuře s pravděpodobností $p \in (0,1)$ nezávisle na ostatních vejcích. S jakou pravděpodobností bude Máša pyšnou matkou právě tří kuřat?

2. (Mendelova zahrádka) Na zahrádce pěstujeme hrách a sledujeme vývoj genu, který se vyskytuje ve dvou formách, a sice G nebo g. Hrách má vždy pár těchto genů, tedy buď GG (dominantní), Gg (smíšený=hybridní, na pořadí nezáleží a Gg je totéž jako gG), a gg (recesivní). Při křížení zdědí nová rostlina náhodně jeden z genů každého rodičů.

   Začněme s hrachem daného typu a zkřížíme ho s hybridem. Tento dále křížíme s hybridem, a tak dále, dalšími kříženími s hybridem.

   (i) Napište matici přechodu takto definovaného Markovského řetězce.

   (ii) Předpokládejme, že začneme s hybridem. Vypočtěte pravděpodobnosti $\mu_n(GG), \mu_n(Gg), \mu_n(gg)$ toho, že v n-té generaci má rostlina geny GG, Gg, resp. gg.

3. Vedoucí katedry statistiky má 4 deštníky, některé doma a některé v kanceláři. Deštník si s sebou bere jen když prší, jinak jde bez deštníku. Může se ale bohužel stát, že všechny deštníky jsou na jednom místě a vedoucí odchází z druhého místa a prší. V tom případě zmokne.

   - Pokud pravděpodobnost deště je p, jaká je pravděpodobnost, že vedoucí zmokne?
   - V Edinburghu je možné předpokládat $p = 0.6$. Kolik deštníků bude potřebovat vedoucí tamní katedry statistiky, aby pravděpodobnost zmoknutí byla menší než 1%?

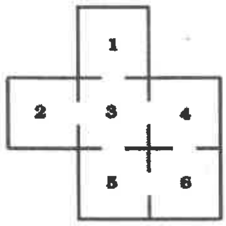
4. Hosté na party hrají hru. Každý host dá jednu ponožku (nebo jinou část oděvu) do pytle. Poté je pytel zamíchán a každý si (náhodně a rovnoměrně) vytáhne jeden kus oděvu. Jaká je pravděpodobnost p_n, že při n hostech si žádný host nevytáhne svůj kus oděvu.

5. Smith je ve vězení a má 3 dolary. Ven se dostane, když bude mít 8 dolarů. Žalářník souhlasil, že si s ním zahraje následující hru. V každém kole vsadí Smith A dolarů. S pravděpodobností 0.4 vyhraje a dostane A dolarů, s pravděpodobností 0.6 prohraje a o A dolarů přijde. Nalezněte pravděpodobnost, že Smith vyhraje dříve než prohraje všechny své peníze, pokud

   (i) Sází vždy jeden dolar.

   (ii) Sází vždy co nejvíce, ale ne více než je nutné pro dosažení osmi dolarů.

6. V bludišti běhá krysa. V každém kroce vyběhne náhodně jedněmi dveřmi z místnosti, ve které se právě nachází.



(i) Napište matici přechodu pravděpodobností příslušného Markovského řetězce.

(ii) Najděte stacionární rozložení.

(iii) Krysa začíná v první místnosti. Jaká je střední doba návratu do první místnosti?

(iv) Krysa začíná v první místnosti, v paté místnosti je past s kusem sýra. Jaká je střední doba prvního (a posledního...) příchodu do páté místnosti?

7. Markovský řetězec se stavy $\{1, 2, 3\}$ má matici přechodu pravděpodobností

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ukažte, že stav 3 je absorbující a spočtěte střední dobu do absorpce, začínáme-li ze stavu 1.

1, Poissonovská slepice

N .. Poisson s $\lambda > 0$ ... $\mathbb{P}(N=k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$

$$\sum_{k=3}^{\infty} \mathbb{P}(N=k) \cdot \mathrm{Binom}(\overset{=k}{N}, 3) =$$

$$= \sum_{k=3}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \binom{k}{3} p^3 (1-p)^{k-3} = \frac{e^{-\lambda} \cdot p^3 \lambda^3}{3!} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{(k-3)!} [\lambda(1-p)]^{k-3}$$

$$= \frac{e^{-\lambda} p^3 \lambda^3}{3!} e^{\lambda(1-p)} = \frac{(p\lambda)^3}{3!} e^{-(\lambda p)} \quad \text{... Poisson s } (\lambda p) > 0.$$

2, (Mendel)

Stavy GG, Gg, gg

	GG	Gg	gg
GG	0,5	0,5*	0
Gg	0,25	0,5	0,25
gg	0	0,5	0,5

*$\mathbb{P}$(nový stav je Gg | původní stav je GG) = 0,5 ...etc

$$\mathbb{P} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{P}^3 = 2^{-3}\begin{pmatrix} 2{,}5 & 4 & 1{,}5 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1{,}5 & 4 & 2{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{P}^2 = 2^{-2}\begin{pmatrix} 1{,}5 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0{,}5 & 2 & 1{,}5 \end{pmatrix}$$

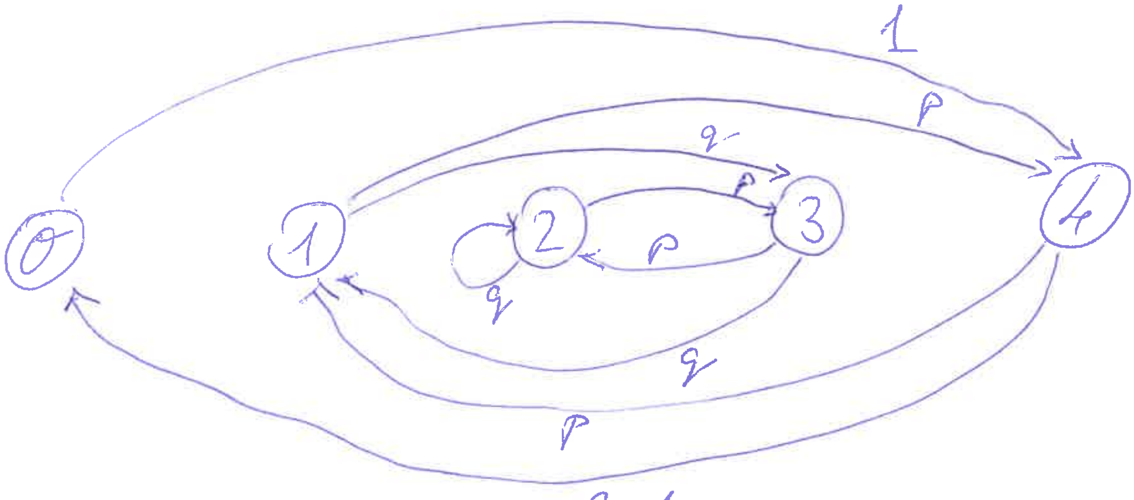
...

$\mu_i(GG) = 1/4$

$\mu_i(Gg) = 1/2$

$\mu_i(gg) = 1/4.$

3, Stavy = $\{0, 1, \dots, 4\}$ ... počet deštníků tam, kde právě je.



$q = 1-p$

"Limitně se blížíme stac. stavu"

$$\tilde{\pi} P = \tilde{\pi}$$

$$(\tilde{\pi}_0, \tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2, \tilde{\pi}_3, \tilde{\pi}_4) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & q & p \\ 0 & 0 & q & p & 0 \\ 0 & q & p & 0 & 0 \\ q & p & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\tilde{\pi}_0, \dots, \tilde{\pi}_4)$$

& $\sum_{j=0}^{4} \tilde{\pi}_j = 1$

$$\tilde{\pi}_4 \cdot q = \tilde{\pi}_0$$
$$\tilde{\pi}_3 q + \tilde{\pi}_4 p = \tilde{\pi}_1$$
$$\vdots$$

Nebo: vyrovnání toky

Pravděpodobnost odtékající z i do j je stejná jako prav. tekoucí z j do i

$\pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji}$ ... rovnice detailní rovnováhy

Pokud platí, pak $(\pi P)_j = \sum_i \pi_i P_{ij} = \sum_i \pi_j P_{ji} = \pi_j$

$\Rightarrow \pi$ je stacionární!

Zde $\pi(0)\cdot 1 = \pi(4)\cdot q$

$\pi(1)\cdot p = \pi(4)\cdot p$ ... $\pi(1)=\pi(4)$

$\pi(2)\cdot p = \pi(3)p$ ... $\pi(2)=\pi(3)$

$\pi(1)\, q = \pi(3)\, q$

$\pi = (\pi(4)\cdot q, \pi(1)=\pi(4), \ldots, \pi(4))$

$\pi_4(q+4)=1$ ... $\pi_0 = \frac{q}{q+4}$

$\mathbb{P}(\text{zmokne ti}) = p\,\pi_0 = \frac{pq}{q+4}$

Pro N: $\frac{pq}{q+N}$ ... 23,6

4, • počítáme počet permutací bez pevného bodu

a, podle principu inkluze a exkluze

$S_{i_1,i_2,\dots,i_k}$ ... permutace s pevnými body $i_1,\dots,i_k$

$$|S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n| = \sum_i |S_i| - \sum_{i,j} |S_i \cap S_j| + \sum_{i,j,k} |S_i \cap S_j \cap S_k| - \dots$$

$$= \binom{n}{1}(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \binom{n}{3}(n-3)! - \dots$$

$$= n! \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{i!} \right\}$$ ... bez pevného bodu

$$n! - |S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n|$$
$$= n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$$

b, D_n ... počet permutací bez pevného bodu

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}) \quad , \quad D_1 = 0, D_2 = 1, D_3 = 2$$

(2,3,1); (3,1,2)

σ bez pevného bodu, $\sigma(1) = i \in \{2,\dots,n-1\}$

• buď $\sigma(i) = 1$ & bez pev. bodu na zbylých $n-2$ bodech

$\rightarrow (n-1)D_{n-2}$

• $\sigma(i) \neq 1$ $\quad \nu(1) = \sigma(i) \neq 1$

$\nu(j) = \sigma(j), j \neq i, j \neq 1$ ... ν bez pevného bodu na $\{1,\dots,n\} \setminus \{i\}$

$\downarrow$

$(n-1)D_{n-1}$

$$p_n = \frac{D_n}{n!} = \frac{n-1}{n} p_{n-1} + \frac{1}{n} p_{n-2} \quad \dots \quad n p_n = (n-1)p_{n-1} + p_{n-2}$$

• pronásobit s^n, sčítat $n=3,4,\dots$; $P(s)=\sum_{n=1}^{\infty} p_n s^n$; $P_1=0,\ P_2=\frac{1}{2}$

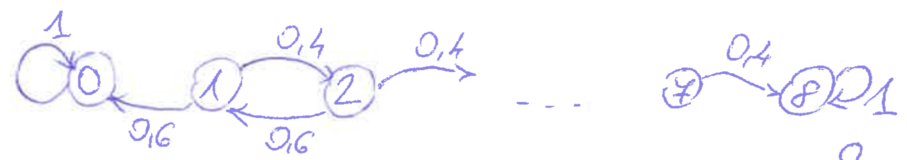
$$\Rightarrow s\left(P'(s)-s\right)=s^2P'(s)+s^2P(s)$$

$$\Rightarrow P'(s)=\frac{s}{1-s}P(s)+\frac{s}{1-s},\quad P(0)=0 \quad \dots \quad P(s)=\frac{e^{-s}}{1-s}-1$$

$$P(s)=\frac{1}{1-s}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}s^k-1+s\right)=\left(\sum_{k=0}^{\infty}s^k\right)\left(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}s^k\right)$$

$$=\sum_{k=2}^{\infty}s^k\left(\sum_{j=2}^{n}\frac{(-1)^j}{j!}\right)$$

5, Dva nezávislé řetězce ... X_n, Y_n ... $X_0 = Y_0 = 3$

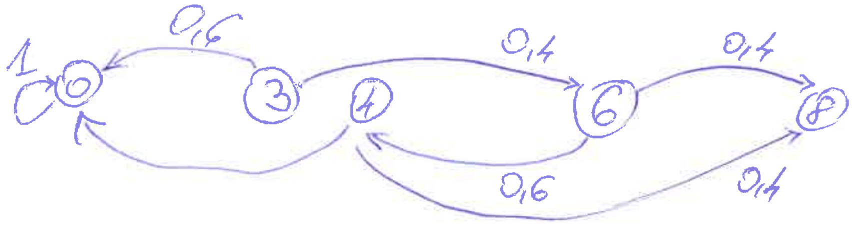
- 

S_j ... první čas dosažení j

$$\varphi(i) = \mathbb{P}(S_8 < S_0 \mid X_0 = i)$$

$$\varphi(i) = 0{,}4\,\varphi(i+1) + 0{,}6\,\varphi(i-1), \quad i = 1, \dots, 7$$

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(8) = 1 \quad \Rightarrow \quad \dots \varphi(3) = 0{,}0964\dots$$

- 

$\varphi(3) = 0{,}256$

$$\varphi(3) = 0{,}4\,\varphi(6) + \underbrace{0{,}6\,\varphi(0)}_{=0}$$

$$\varphi(6) = 0{,}4\,\varphi(8) + 0{,}6\,\varphi(4)$$

$$\varphi(4) = 0{,}4\,\varphi(8)$$

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(8) = 1$$

6,

i, $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

ii, $\pi P = \pi$; nebo rovnice detailní rovnováhy

$$\Rightarrow \pi = [1, 1, 4, 2, 2, 2] \cdot \frac{1}{12}$$

iii, ... později: střední doba návratu z i do i $= \frac{1}{\pi(i)}$ ... $= 12$ pro $i = 1$

... z analýzy 1. kroku $T_1 = \inf\{m \geq 1 : X_m = 1\}$

$$a_i = \mathbb{E}[T_1 \mid X_0 = i]$$

$$a_1 = 1 + a_3 ; \quad a_2 = 1 + a_3, \quad a_3 = 1 + \cancel{\frac{a_1}{4}} + \frac{a_2}{4} + \frac{a_4}{4} + \frac{a_5}{4}$$

$$a_4 = 1 + \frac{a_3}{2} + \frac{a_6}{2} ; \quad a_5 = 1 + \frac{a_3}{2} + \frac{a_6}{2}, \quad a_6 = \frac{a_4}{2} + \frac{a_5}{2} + 1$$

$$a_1 = a_2 = 1 + a_3, \quad a_4 = a_5, \quad a_6 = a_4 + 1$$

$$a_3 = 1 + \frac{1 + a_3}{4} + \frac{a_4}{2} ; \quad a_4 = 1 + \frac{a_3}{2} + \frac{a_4 + 1}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{a_3}{2} = \frac{5}{4} + \frac{a_4}{2} ; \quad \frac{a_4}{2} = \frac{3}{2} + \frac{a_3}{2}$$

$$\frac{3}{4} a_3 = \frac{5}{4} + \frac{3}{2} + \frac{a_3}{2} \quad \dots \quad \frac{1}{4} a_3 = \frac{11}{4}$$

$$a_1 = 1 + a_3 = 12.$$

ii) ψ_i ... průměrný počet kroků na dosažení páté místnosti začínáme-li z i-té místnosti

$\psi_5 = 0$, $\psi_6 = 1 + \psi_5/2 + \psi_4/2$; $\psi_4 = 1 + \psi_6/2 + \psi_3/2$

$\psi_3 = 1 + \psi_1/4 + \psi_2/4 + \psi_4/4 + \psi_5/4$, $\psi_1 = \psi_2 = 1 + \psi_3$ ... $\psi_1 = 7$.

7) 3 je absorbující ... $P_{33} = 1$

Střední doba do 3 z i : a_i ... $a_3 = 0$

$$a_1 = 1 + \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{3}, \quad a_2 = 1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{2} \quad \ldots \quad a_2 = 2$$

$$\frac{2}{3} a_1 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \quad \ldots \quad a_1 = 5/2.$$