Markovské procesy

LS 2021/22, FJFI ČVUT

4. Cvičení

Galtonův-Watsonův proces

1. **(Vytvořující funkce)** Pro X náhodnou proměnnou s oborem hodnot v $\mathbb{N}_0$ nazýváme mocninnou řadu
$$P_X(s) := \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = n)s^n$$
její vytvořující funkcí. Ukažte, že:
   (a) Pro její poloměr konvergence R_X platí $R_X \geq 1$.
   (b) Dále platí $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{k!}P_X^{(k)}(0)$ pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$.
   (c) Speciálně tedy $\mathbb{P}(X = 0) = P_X(0)$.
   (d) $\mathbb{E}X = P_X'(1-)$ a $\mathbb{E}[X(X-1)\dots(X-k+1)] = P_X^{(k)}(1-)$.
   (e) Konečně pak $\operatorname{var} X = P_X''(1-) + P_X'(1-) - (P_X'(1-))^2$.

2. Určete vytvořující funkci (a její poloměr konvergence) náhodné veličiny s Poissonovým rozdělením s parametrem $\lambda > 0$ a s její pomocí pak určete její střední hodnotu a rozptyl.

3. Dokažte, že pro X a Y dvě nezávislé náhodné veličiny s oborem hodnot v $\mathbb{N}_0$ a vytvořujícími funkcemi P_X a P_Y a $Z = X + Y$ platí $P_Z(s) = P_X(s)P_Y(s), |s| < \min\{R_X, R_Y\}$.

4. Zobecněte předchozí větu na n nezávislých náhodných veličin a s její pomocí pak najděte rozdělení součtu nezávislých Poissonovských veličin $X_1, \dots, X_n$ s parametry $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$.

5. Je-li N náhodná veličina s oborem hodnot v $\mathbb{N}_0$ a $X_1, X_2, \dots$ jsou nezávislé náhodné veličiny, pak $S_N := X_1 + X_2 + \cdots + X_N$ je náhodný součet nezávislých veličin. Jsou-li X_i stejně rozdělené, s vytvořující funkcí P_X, pak dokažte, že $P_{S_N}(s) := P_N(P_X(s))$. Dále odvoďte $\mathbb{E}S_N = \mathbb{E}N \cdot \mathbb{E}X_1$ a $\operatorname{var} S_N = \mathbb{E}N \cdot \operatorname{var} X_1 + \operatorname{var} N \cdot (\mathbb{E}X_1)^2$. Použijte tento postup na Poissonovskou slepici.

6. **Galtonův-Watsonův proces větvení**
Tento proces popisuje evoluci populace jednoho druhu, v níž každý jedinec žije jednu jednotku času a na konci svého života dá dělením vznik U novým jedincům, kde $U = k$ s pravděpodobností p_k, tedy
$$\mathbb{P}(U = k) = p_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \text{a} \quad \sum_{k \geq 0} p_k = 1.$$
Označíme-li tedy počet organismů v n-té generaci X_n, pak je
$$X_0 = 1,$$
$$X_n = \begin{cases} \sum_{i=1}^{X_{n-1}} U_i^{(n-1)} & \text{pokud} \quad X_{n-1} \neq 0 \\ 0 \quad \text{pokud} \quad X_{n-1} = 0. \end{cases},$$

$U_i^{(n-1)}$ je tedy počet nových jedinců, kteří vzniknou z i-tého jedince žijícího po $n-1$ krocích. Všechna $U_i^{(n-1)}$ předpokládáme nezávislé. Podle předešlých cvičení tedy platí

$$\begin{aligned} P_{X_n}(s) &= P_{X_{n-1}}(P_U(s)) \\ \mathbb{E}X_n &= \mathbb{E}X_{n-1} \cdot \mathbb{E}U, \\ \operatorname{var} X_n &= \mathbb{E}X_{n-1} \operatorname{var} U + (\mathbb{E}U)^2 \operatorname{var} X_{n-1}. \end{aligned}$$

Dokažte, že pokud $\mathbb{E}U = \mu$ a $\operatorname{var} U = \sigma^2$, pak $\mathbb{E}X_n = \mu^n$ a $\operatorname{var} X_n = \sigma^2 \mu^{n-1} \frac{\mu^n - 1}{\mu - 1}$ pro $\mu \neq 1$ a $\operatorname{var} X_n = n\sigma^2$ pro $\mu = 1$.

7. **(GW2)** Označme $e_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$ pravděpodobnost vyhynutí populace během prvních n kroků. Protože z $X_n = 0$ plyne ihned i $X_{n+1} = 0$, je $(e_n)_n$ neklesající posloupnost, která má tedy limitu $e = \lim_{n\to\infty} e_n$. Dokažte, že e je nejmenší kořen rovnice $x = P_U(x)$ na $[0, 1]$.

   (a) Číslo e splňuje rovnici $e = P_U(e)$: Do rovnice $P_{X_n}(s) = P_U(P_{X_{n-1}}(s))$, dosaďte $s = 0$, odvoďte $e_n = P_U(e_{n-1})$ a vezměte limitu.

   (b) Nechť $\eta \in [0, 1]$ je nějaké řešení rovnice $P_U(\eta) = \eta$. Dokažte, že pak $e \leq \eta$. Nápověda: využijte monotonii funkce P_U a postupujte indukcí, $e_1 = P_U(e_0) = P_U(0) \leq P_U(\eta) = \eta$, $e_2 = P_U(e_1) \leq P_U(\eta) = \eta, \ldots$

8. **(GW3)** Nechť $p_0 = p_1 = 1/5$ a $p_2 = 3/5$. Najděte střední hodnotu počtu jedinců n-té populace a pravděpodobnost vymření e.

9. **(GW4)** Nechť U je geometrické rozdělení na $\mathbb{N}_0$ s parametrem $0 < p < 1$, tedy $\mathbb{P}(U = k) = p(1-p)^k$. Najděte rozdělení X_n, tedy $\mathbb{P}(X_n = j)$ pro každé $j = 0, 1, 2, \ldots$
   Nápověda: Nejprve najdeme vytvořující funkci $P_{X_n}(s)$ ze vztahů $P_{X_1} = P_U$ a $P_{X_n} = P_U \circ P_{X_{n-1}}$. Označíme-li $\mu = \mathbb{E}U = \frac{q}{p}$, pak vyjde

$$P_{X_n}(s) = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \mu^k - s \sum_{k=1}^{n-1} \mu^k}{\sum_{k=0}^{n} \mu^k - s \sum_{k=1}^{n} \mu^k}.$$

   Tuto funkci pak rozložte do mocninné řady se středem v počátku a srovnejte koeficienty s $P_{X_n}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = k) s^k$.

X ... náh. proměnná, obor hodnot $\mathbb{N}_0$

1, $P_X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=n) s^n$

- poloměr konvergence: $a_n = \mathbb{P}(X=n)$ ... $0 \le \sqrt[n]{a_n} \le 1$

$$R = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} \ge 1$$

- $\mathbb{P}(X=0) = P_X(0)$ ... z definice

$\mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{k!} P_X^{(k)}(0)$ ... derivace mocninné řady člen po členu

- $\mathbb{E}X = \sum_{n=0}^{\infty} n \mathbb{P}(X=n)$; $P_X'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbb{P}(X=n) s^{n-1}$, $0 < s < 1$

  - je-li $\mathbb{E}X < +\infty$, je $P_X'(1-) = \mathbb{E}X$ podle Abelovy věty
  - je-li $\mathbb{E}X = +\infty$: $\forall N \; \exists n_0 : \sum_{n=0}^{n_0} n \mathbb{P}(X=n) > N$

  ... a tedy: $\exists s_0 : s_0 < s < 1$ $\sum_{n=0}^{\infty} n \mathbb{P}(X=n) s^{n-1} \ge \sum_{n=0}^{n_0} n \mathbb{P}(X=n) s_0^{n-1} > \frac{N}{2}$.

  ... a tedy: $P_X'(1-) = +\infty$.

- $P_X^{(k)}(s) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) s^{n-k} \mathbb{P}(X=n)$

$\mathbb{E}[X(X-1)\dots(X-k+1)] = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) \mathbb{P}(X=n)$

- $\operatorname{var} X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}[X(X-1)] + \mathbb{E}X - (\mathbb{E}X)^2$

$$= P_X''(1-) + P_X'(1-) - [P_X'(1-)]^2$$

2, $\mathbb{P}(X=n)=\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$, $P_X(s)=\sum_{n=0}^{\infty} s^n\,\mathbb{P}(X=n)=\sum_{n=0}^{\infty} s^n\cdot\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda s}$
$=e^{\lambda(s-1)}$

$$\mathbb{E}X=\frac{d}{ds}\left[e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda s}\right]_{s=1}=e^{-\lambda}\left[e^{\lambda s}\cdot\lambda\right]_{s=1}=\lambda$$

$$P_X''(1)=\left(e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda s}\right)''_{s=1}=e^{-\lambda}\left(e^{\lambda s}\cdot\lambda\right)'_{s=1}=\lambda^2$$

$\operatorname{var}X=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda$ ← z 1. cvičení

3, X, Y nezávislé, $Z=X+Y \overset{?}{\Rightarrow} P_Z(s)=P_X(s)P_Y(s)$

$$P_X(s)=\sum_{n=0}^{\infty} s^n\,\mathbb{P}(X=n),\quad P_Y(s)=\sum_{n=0}^{\infty} s^n\,\mathbb{P}(Y=n)$$

$$Z=X+Y \;\dots\; \mathbb{P}(Z=k)=\sum_{l=0}^{k}\mathbb{P}(X=l)\,\mathbb{P}(Y=k-l)$$

$$\Rightarrow P_Z(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(Z=n)s^n=\sum_{n=0}^{\infty}s^n\sum_{l=0}^{n}\mathbb{P}(X=l)\,\mathbb{P}(Y=n-l)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n}s^l\,\mathbb{P}(X=l)\cdot s^{n-l}\,\mathbb{P}(Y=n-l)$$ … Cauchyův součin řad

4, ... Stejně, indukcí $P_{X_1+\dots+X_n}(s) = P_{X_1}(s)\dots P_{X_n}(s)$

Pro Poissonovské $X_1, \dots, X_n$

$$P_{X_1+\dots+X_n}(s) = e^{\lambda_1(s-1)} \dots e^{\lambda_n(s-1)} = e^{(\lambda_1+\dots+\lambda_n)(s-1)}$$

$\Rightarrow$ Poissonovo rozdělení s par. $\lambda_1+\dots+\lambda_n$.

5, N náh. veličina, $X_1, X_2, \dots$ nezávislé, stejně rozdělené ... jako X

$S_N = X_1+X_2+\dots+X_N$ ... náhodný součet náh. veličin

... součet náhodného počtu

$$\cdot\, P_{S_N}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_N=n)\, s^n = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_1+\dots+X_N=n)\, s^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} s^n \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N=k \,\&\, X_1+\dots+X_N=n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} s^n \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N=k \,\&\, X_1+\dots+X_k=n)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N=k) \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} s^n\, \mathbb{P}(X_1+\dots+X_k=n)}_{P_{X_1+\dots+X_k}(s) = [P_X(s)]^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N=k) \cdot [P_X(s)]^k = P_N(P_X(s))$$

$$\bullet\ \mathbb{E}S_N = P'_{S_N}(1^-) = P'_N(P_X(1))\cdot P'_X(1) = P'_N(1)\cdot P'_X(1) = \mathbb{E}N\cdot \mathbb{E}X.$$

$$P_X(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=n) = 1$$

$$\bullet\ \operatorname{var} S_N = P''_{S_N}(1-) + \underbrace{P'_{S_N}(1-) - [P'_{S_N}(1-)]^2}_{\mathbb{E}N\cdot\mathbb{E}X - [\mathbb{E}N\cdot\mathbb{E}X]^2}$$

$$[P_N(P_X(s))]''_{s=1} = [P'_N(P_X(s))\cdot P'_X(s)]'_{s=1}$$

$$= [P''_N(P_X(s))\cdot P'_X(s)^2]_{s=1} + [P'_N(P_X(s))\cdot P''_X(s)]_{s=1}$$

$$= \underbrace{P''_N(1)}_{\mathbb{E}[N(N-1)]}\cdot \underbrace{P'_X(1)^2}_{[\mathbb{E}X]^2} + \underbrace{P'_N(1)}_{\mathbb{E}N}\cdot\underbrace{P''_X(1)}_{\mathbb{E}[X(X-1)]}$$

$$\Rightarrow \operatorname{var} S_N = \mathbb{E}[N^2]\cdot[\mathbb{E}X]^2 - \mathbb{E}N\cdot[\mathbb{E}X]^2 + \mathbb{E}N\cdot\mathbb{E}[X^2] - \cancel{\mathbb{E}N\cdot\mathbb{E}X}$$

$$+ \cancel{\mathbb{E}N\cdot\mathbb{E}X} - [\mathbb{E}N\cdot\mathbb{E}X]^2$$

$$= [\mathbb{E}X]^2\{\mathbb{E}N^2 - (\mathbb{E}N)^2\} + \mathbb{E}N\{-[\mathbb{E}X]^2 + \mathbb{E}X^2\}$$

$$= (\mathbb{E}X)^2\cdot\operatorname{var}N + \mathbb{E}N\cdot\operatorname{var}X\ .$$

6, Galtonův-Watsonův proces

- $\mathbb{P}(U=k)=p_k$, $k=0,1,2,\dots$, $\sum_{k=0}^{\infty} p_k=1$

- X_n ... počet organismů v n-té generaci; $X_0=1$ .. počáteční stav

$$X_n=\sum_{i=1}^{X_{n-1}} U_i^{(n-1)} \quad \dots X_{n-1}\neq 0 \quad \dots \text{nebo } X_n=0 \text{ při } X_{n-1}=0$$

- $P_{X_n}(s)=P_{X_{n-1}}(P_U(s))$, $\mathbb{E}X_n=\mathbb{E}X_{n-1}\cdot\mathbb{E}U$

$$\operatorname{var}X_n=\mathbb{E}X_{n-1}\operatorname{var}U+(\mathbb{E}U)^2\operatorname{var}X_{n-1}.$$

- Nechť $\mathbb{E}U=\mu$ & $\operatorname{var}U=\sigma^2$

- Indukce: $\mathbb{E}X_1=\mathbb{E}U=\mu$; $\mathbb{E}X_n=\mathbb{E}X_{n-1}\cdot\mathbb{E}U=\mu^{n-1}\cdot\mu=\mu^n$

- $\operatorname{var}X_n=\mu^{n-1}\cdot\sigma^2+\mu^2\cdot\operatorname{var}X_{n-1}$

$$\operatorname{var}X_1=\sigma^2,\ \operatorname{var}X_2=\sigma^2\cdot\mu+\sigma^2\mu^2=\sigma^2\mu(1+\mu)$$

$$\operatorname{var}X_3=\mu^2\sigma^2+\mu^2\cdot\sigma^2\mu(1+\mu)=\sigma^2\mu^2(1+\mu+\mu^2)\dots$$

$$\operatorname{var}X_n=\sigma^2\mu^{n-1}(1+\mu+\dots+\mu^{n-1})=\sigma^2\mu^{n-1}\frac{\mu^n-1}{\mu-1} \quad \mu\neq 1$$

$$=n\sigma^2 \quad \dots \mu=1$$

7, $e_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$ ... $\{X_n = 0\} \subseteq \{X_{n+1} = 0\}$

$\Rightarrow e_n$ je neklesající ... má limitu

$e = \lim_{n \to +\infty} e_n$

a, platí $e = P_U(e)$

$$P_{X_n}(s) = P_{X_{n-1}}(P_U(s)) = \dots = P_U(P_U(\dots(s))\dots)$$

$$= P_U(P_{X_{n-1}}(s))$$

- $s = 0$: $P_{X_n}(0) = \mathbb{P}(X_n = 0) = e_n = P_U(P_{X_{n-1}}(0)) = P_U(e_{n-1})$
- P_U je spojitá na $[0;1]$ ... $e = P_U(e)$.

b, Pokud je $\xi \in [0;1]$ s $P_U(\xi) = \xi$, pak $e \leq \xi$:

- $P_U(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(U = n) s^n$ je neklesající na $[0;1]$ (všechny členy jsou neklesající)

$$e_1 = P_U(e_0) = P_U(0) \leq P_U(\xi) = \xi$$

$$e_0 = \mathbb{P}(\cancel{U} X_0 = 0) = 0$$

$$e_2 = P_U(e_1) \leq P_U(\xi) = \xi \quad \dots \quad e_n \leq \xi \dots e \leq \xi.$$

8, $\mathbb{P}(U=0) = p_0 = 1/5$, $\mathbb{P}(U=1) = p_1 = 1/5$, $\mathbb{P}(U=2) = p_2 = 3/5$

- $\mathbb{E}U = 1/5 \cdot 0 + 1/5 \cdot 1 + \frac{3}{5} \cdot 2 = 7/5 \Rightarrow \mathbb{E}X_n = (7/5)^n$
- e získáme jako řešení $e = P_U(e) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}e + \frac{3}{5}e^2$

$$e = 1 \;\&\; e = 1/3 \quad \dots \quad \boxed{e = 1/3}$$

9, U na $\mathbb{N}_0$: $\mathbb{P}(U=k)=p(1-p)^k$ ... najděte rozdělení X_n!

$$P_U(s)=\sum_{n=0}^{\infty} s^n\,\mathbb{P}(U=n)=\sum_{n=0}^{\infty} s^n\cdot p(1-p)^n=p\cdot\frac{1}{1-s(1-p)},\ |s|<\frac{1}{1-p}$$

$$P_{X_1}(s)=P_U(s)=\frac{p}{1-qs}=\frac{p}{1-p\mu s}\qquad \mu=\mathbb{E}U=\frac{1-p}{p}=\frac{q}{p}$$

$$=\frac{1}{1/p-\mu s}=\frac{1}{1+\mu-\mu s}\qquad 1+\mu=1/p$$

$$P_U(P_U(s))=P_{X_2}(s)=\dots=\frac{1+\mu-\mu s}{(1+\mu+\mu^2)-s(\mu+\mu^2)}$$

$\vdots$

$$P_{X_n}(s)=\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\mu^k-\left(\sum_{k=1}^{n-1}\mu^k\right)s}{\sum_{k=0}^{n}\mu^k-\left(\sum_{k=1}^{n}\mu^k\right)s}=\begin{cases}\mu=1: & \dfrac{n-(n-1)s}{n+1-ns}\\[2ex] \mu\neq 1: & \dfrac{(\mu^{n-1}-1)-(\mu^{n-2}-1)\mu s}{(\mu^{n}-1)-(\mu^{n-1}-1)\mu s}\end{cases}$$

... rozvineme do řady v s:

$$\mu=1:\quad P_{X_n}(s)=\frac{n-(n-1)s}{n+1-ns}=$$

$$=1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n(n+1)}\cdot\frac{1}{1-\frac{n}{n+1}s}=1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^k s^k$$

$$\mathbb{P}(X_n=0)=1-\frac{1}{n+1};\quad \mathbb{P}(X_n=k)=\frac{1}{n(n+1)}\left(\frac{n}{n-1}\right)^k$$

$$v=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(X_n=0)=1.$$

$$\mu \neq 1 : \quad P_{X_n}(s) = \frac{(\mu^{n-1}-1) - (\mu^{n-2}-1)\mu s}{(\mu^{n}-1) - (\mu^{n-1}-1)\mu s}$$

$$= \dots = \frac{\mu^{n-2}-1}{\mu^{n-1}-1} + \left(\frac{\mu^{n-1}-1}{\mu^{n}-1} - \frac{\mu^{n-2}-1}{\mu^{n-1}-1} \right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\mu^{n-1}-1}{\mu^{n}-1} \mu \right)^{k} \cdot s^{k}$$

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = \frac{\mu^{n-1}-1}{\mu^{n}-1} \quad \dots \quad \begin{array}{l} \mu < 1 \dots \longrightarrow 1 \\ \mu > 1 \dots \longrightarrow 1/\mu \end{array}$$