Markovské procesy

LS 2021/22, FJFI ČVUT

5. Cvičení

Analýza prvního kroku a klasifikace stavů

1. Uvažujte Markovův proces s maticí pravděpodobností přechodu

$$P = [P_{i,j}]_{0\le i,j\le 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   a) Jaké jsou absorbující stavy?
   b) Pokud proces začne ve stavu 1, jaká je pravděpodobnost, že bude absorbován do 0?

2. Hráč hází spravedlivou šestistěnnou kostkou. Sčítá padlá čísla, dokud součet není striktně větší než deset. Spočtěte pravděpodobnost, že hra skončí součtem 13.

3. Opakujeme nezávislé hody mincí, při kterých padá Orel (O) nebo Hlava (H). Kolik hodů je třeba v průměru provést, než se objeví posloupnost vzorů HOHH?

4. Jistý Mr. Trump píše na Twitteru zprávy tak, že rovnoměrně a náhodně bouchá do anglické klávesnice s 26 znaky bez diakritiky a mezerníkem (celkem tedy 27 kláves). Jak dlouho v průměru trvá, než se v jeho zprávě objeví samostatně stojící slovo COFFEE?

5. Z hradní věže vedou tři východy. První východ ústí do tunelu, kterým se člověk po třech dnech chůze vrátí zpátky do věže. Druhý východ vede do tunelu, kterým se člověk vrátí zpět do věže po jednom dnu chůze. Třetí východ vede ven. Ve věži je tma a východy jsou voleny náhodně.
   a) Ukažte, že lze tuto věž namodelovat Markovým řetězcem se čtyřmi stavy.
   b) Napište jeho matici přechodu pravděpodobností.
   c) Jak dlouho v průměru trvá dostat se z věže ven?

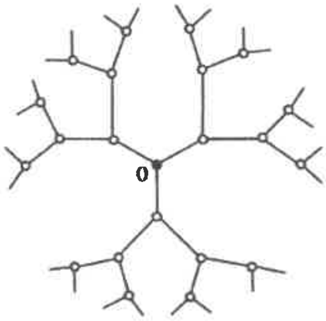
6. Uvažujte Markovův řetězec s maticí přechodu

$$P = [P_{i,j}]_{0\le i,j\le 5} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/6 & 1/2 & 1/6 & 0 & 0 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   Je tento řetězec rozložitelný? Pokud ano, jaké jsou jeho komunikující třídy? Určete tranzitní a rekurentní stavy řetězce. Najděte periodu každého stavu.

7. Uvažujme náhodnou procházku na následujícím nekonečném grafu. Každý vrchol má právě 3 sousední vrcholy, a pravděpodobnost přechodu k nim je shodně 1/3.

a) Nechť 0 označuje stav uprostřed (při detailním pohledu zjistíme, že všechny stavy jsou ekvivalentní, a že tedy žádný není nijak vyjímečný. Vybereme prostě libovolný stav a označíme ho 0). Nechť $D(i)$ je vzdálenost (=délka nejkratší cesty ze) stavu i od 0, tedy $D(0) = 0$, každý soused 0 má $D(i) = 1$, atd. Nechť X_n ja pozice procházky po n krocích, $X_0 = 0$. Ukažte, že $Z_n = D(X_n)$ je Markovský řetězec a najděte jeho matici pravděpodobností přechodu.
b) Ukažte, že Z_n je tranzitní.
c) Ukažte, že i X_n je tranzitní.



8. Po schodech je možno jít nahoru po jednom či po dvou stupních. Schody mají celkem n stupňů. Kolika způsoby lze schody vyjít?
Nápověda: Označme toto číslo ω_n. Pak $\omega_3 = 3$ a $\omega_m = \omega_{m-1} + \omega_{m-2}$. Dále uvažujte vytvořující funkci $W(s) = \sum_{m\geq 0} s^m \omega_m$.

9. Ehrenfestův řetězec má stavový prostor $\{0, 1, \ldots, n\}$ a pravděpodobnosti přechodu $P_{i,i+1} = 1 - \frac{i}{n}$ a $P_{i,i-1} = \frac{i}{n}$, $i = 0, \ldots, n$. Použijte podmínku detailní rovnováhy a ukažte, že jeho stacionární rozdělení je binomické.

10. Uvažujme náhodnou procházku na $\mathbb{Z}$ vycházející z nuly, která pokračuje s pravděpodobností 1 doprava (tedy do stavu 1). Ze stavu k pak pokračuje doprava (tedy do stavu $k+1$) s pravděpodobností p^k, doleva (tedy do $k-1$) s pravděpodobností q^k a se zbývající pravděpodobností zůstává v k. Nechť parametry p, q splňují $0 < p < q$ a $p + q = 1$. Dokažte, procházka s pravděpodobností 1 navštíví nulu nekonečněkrát.

11. V populaci o N jedincích je několik z nich hospitalizováno s určitou nemocí. Každý den jde jeden zdravý jedinec na návštěvu do nemocnice a pozdraví se se všemi nemocnými. Pravděpodobnost přenosu nákazy při kontaktu zdravého a nemocného jedince je $0 < p < 1$. Pokud se zdravý jedinec při své návštěvě nemocnice nakazí, už zde zůstane, jinak se vrací domů. Předpokládejme, že na začátku je nemocný jen jeden pacient. Ukažte, že v průměru trvá $\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{1-q^k}$ dní než se nakazí všichni, kde $q = 1 - p$.

5. Cvičení

1, a, $S = \{0, 1, 2, 3\}$, absorbující stavy: 0, 3

b, $X_0 = 1$ $\quad \varphi(k) = \mathbb{P}(\exists n: X_n = 0 \mid X_0 = k),\ k = 0,1,2,3$

$$\varphi(0) = 1, \quad \varphi(3) = 0$$

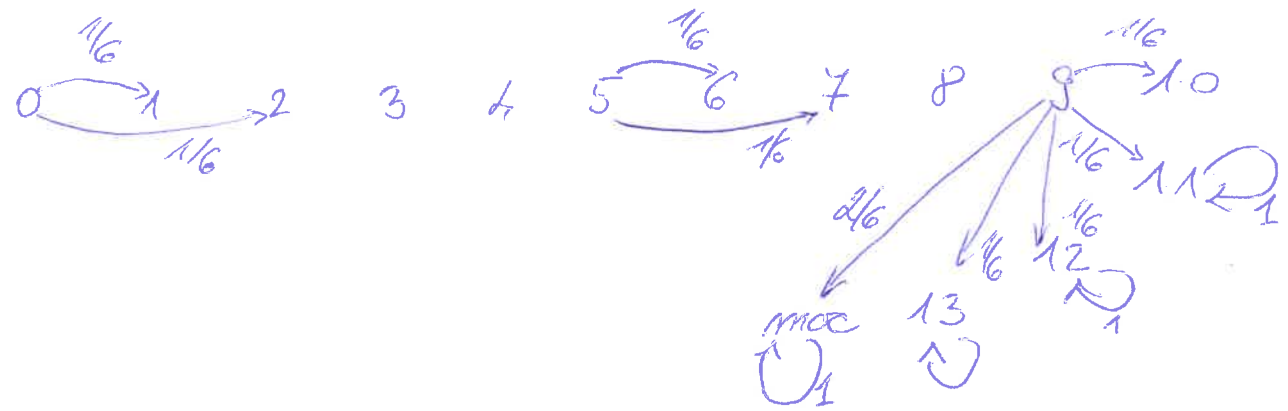
$$\varphi(1) = 0.3\,\varphi(0) + 0.7\,\varphi(2) \quad \Rightarrow \quad \varphi(1) = 0.3 + 0.21\,\varphi(1)$$

$$\varphi(2) = 0.3\,\varphi(1) + \cancel{0{,}7\,\varphi(3)} \quad \dots \quad \varphi(2) = 0.3\,\varphi(1)$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi(1) \cong 0{,}38$$

2,



$$\varphi(k) = \mathbb{P}(\exists n: X_n = 13 \mid X_0 = k)$$

$$\varphi(0) = \frac{1}{6}[\varphi(1) + \dots + \varphi(6)] \qquad \varphi(13) = 1,\ \varphi(11) = \varphi(12) = 0$$

$$\vdots \qquad \varphi(moc) = 0$$

$$\varphi(7) = \frac{1}{6}[\varphi(8) + \dots + \varphi(13)]$$

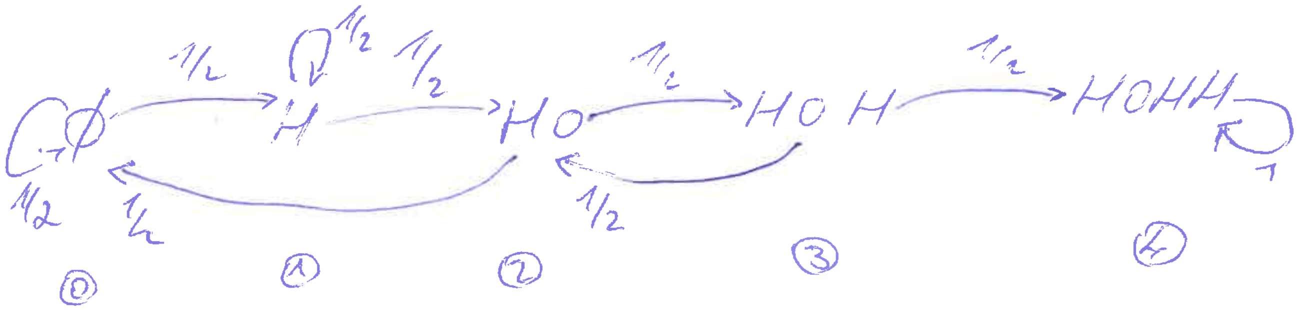
$$\varphi(8) = \frac{1}{6}[\varphi(9) + \quad + \varphi(13) + \varphi(moc)]$$

$$\vdots$$

$$\varphi(10) = \frac{1}{6}[\overset{=0}{\varphi(11)} + \overset{=0}{\varphi(12)} + \varphi(13) + \varphi(moc) \cdot \tfrac{3}{6}] = \varphi(13)/6 = 1/6$$

... řešení ... $\varphi(0) = 0{,}18\dots$

3, stavy jsou počáteční konce:



$$\psi_0 = 1 + \frac{1}{2}\psi_0 + \frac{1}{2}\psi_1$$

$$\psi_1 = 1 + \frac{1}{2}\psi_1 + \frac{1}{2}\psi_2$$

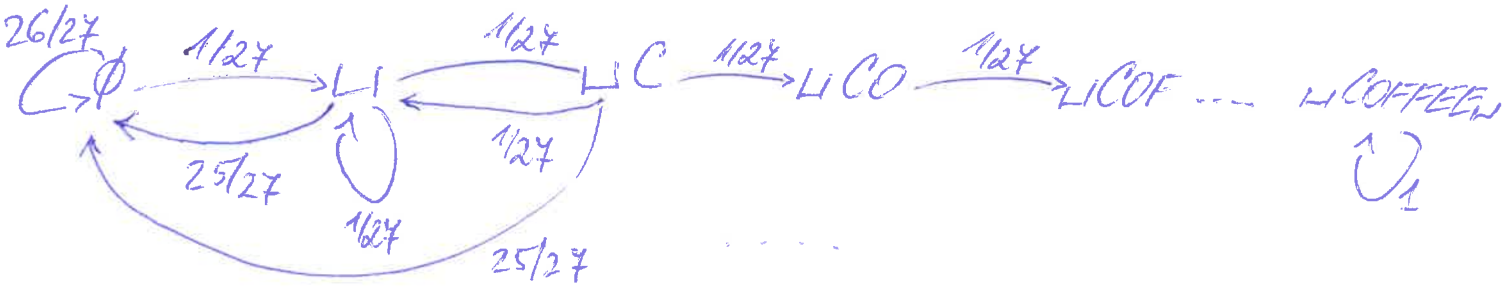
$$\psi_2 = 1 + \frac{1}{2}\psi_0 + \frac{1}{2}\psi_3$$

$$\psi_3 = 1 + \frac{1}{2}\psi_2 + \frac{1}{2}\psi_4$$

? $\psi_3 = 8, \ \psi_2 = 14, \ \psi_1 = 16$

$\boxed{\psi_0 = 18}$

4, Stejně: ␣COFFEE␣



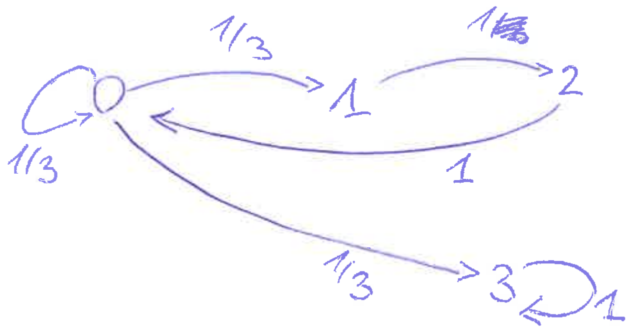
$$P = \begin{pmatrix} 26/27, & 1/27, & 0, & \dots, & 0 \\ 25/27, & 1/27, & 1/27, & 0 & \dots 0 \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & \dots & & 0, & 1/27 \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\psi = P\psi + \mathbb{1}$$

$$(Id - P)\psi = \mathbb{1}$$

$$\psi(0) \stackrel{?}{=} 7{,}3398 \cdot 10^{12}$$

5,



$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$h(3) = 0$

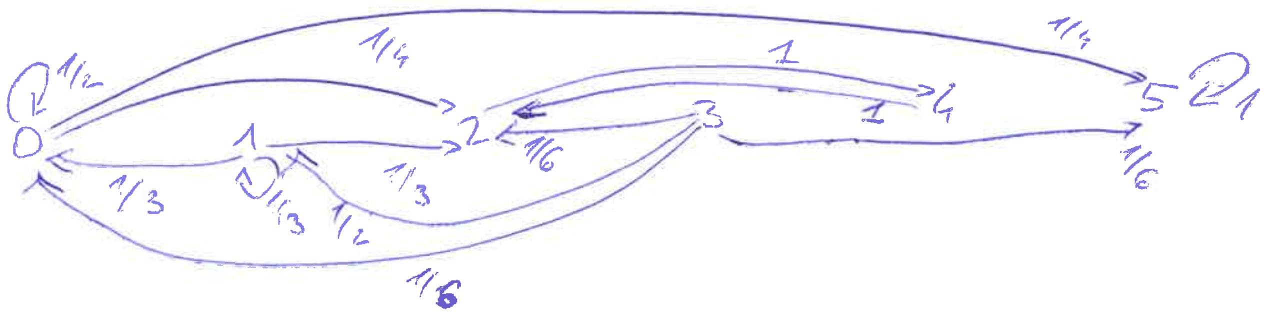
$h(2) = 1 + h(0)$

$h(1) = 1 + h(2)$

$h(0) = 1 + h(0)/3 + h(1)/3 + h(3)/3$

$\Rightarrow h(0) = 5.$

6,



Třídy: $\{2,4\}; \{5\}; \{0\}, \{1\}, \{3\}$

Tranzitní: $\{0; 1; 3\}$, rekurentní: $\{2, 4, 5\}$

Periody: 0, 1, 5 - aper., 3 .. per. 0 ; 2, 4 .. per. 2

7, $Z_n = D(X_n)$

$$\mathbb{P}(Z_{n+1}=1 \mid Z_n=0)=1$$

$$\mathbb{P}(Z_{n+1}=k+1 \mid Z_n=k)=2/3, \quad k\geq 1$$

$$\mathbb{P}(Z_{n+1}=k-1 \mid Z_n=k)=1/3, \quad k\geq 1$$

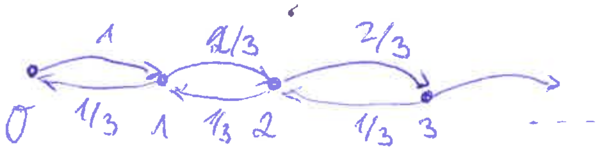
$Z_n=0 \Longleftrightarrow X_n=0$ $\qquad P^n_{00}(Z)=P^n_{00}(X)$

$$\ldots \sum_{n=0}^{\infty} P^n_{00}(Z)=\sum_{n=0}^{\infty} P^n_{00}(X)$$

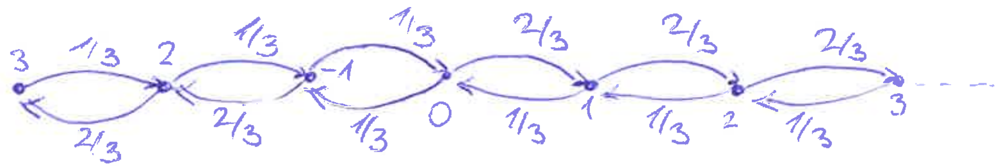
$\rightarrow$ Z je tranzitní $\Longleftrightarrow$ X je tranzitní

7b,

Z:



Y:



$Z_n=|Y_n|$ $\quad\ldots\quad$ $\mathbb{P}(Z_n=k)=\mathbb{P}(|Y_n|=k)$

W: náh. procházka na $\mathbb{Z}$ s $p=2/3$, $q=1/3$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P^{2n}_{00}(W)=\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\binom{2n}{n}}_{\leq 2^{2n}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n < +\infty$$

... tranzitivní

Cesta Y z 0 do 0 ... v kladných číslech ... stejná jako u W

v záporných číslech ... menší prav. než u W.

$$\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} P^n_{00}(Z)=\sum_{n=0}^{\infty} P^n_{00}(|Y|)=\sum_{n=0}^{\infty} P^n_{00}(Y)\leq \sum_{n=0}^{\infty} P^n_{00}(W)<+\infty.$$

8, $w_3=3,\ w_0=1,\ w_1=1,\ w_2=2$

$$W(s)=\sum_{n\ge 0} s^n w_n \quad , \quad w_{n+2}=w_{n+1}+w_n,\ n\ge 0$$

↓ násobíme s^n & sečteme

$$s^{-2}(W(s)-w_0-sw_1)=s^{-1}(W(s)-w_0)+W(s)$$

$$\Rightarrow W(s)=\frac{-1}{s^2+s-1}=\frac{1}{1-s-s^2}$$

$$W(s)=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s-b}\right) \quad a=\frac{\sqrt{5}-1}{2},\ b=\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad \dots s^2+s-1=(s-a)(s-b)$$

$$ab=-1 \quad =\frac{b}{b-a}\cdot\frac{1}{1+bs}-\frac{a}{a-b}\cdot\frac{1}{1+as}$$

$$=\sum_{n\ge 0} s^n\cdot\underbrace{\frac{(1+\sqrt{5})^{n+1}-(1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}}}_{w_n}.$$

9, $P_{i,i+1}=1-\frac{i}{n}$ $\qquad S=\{0,\dots,n\}$

$P_{i,i-1}=\frac{i}{n}$ $\qquad i=0,\dots,n$

Hledáme $\pi(i),\ i=0,\dots,n$ s $\pi_i P_{ij}=\pi_j P_{ji}$

tedy $\pi(i)P_{i,i+1}=\pi(i+1)P_{i+1,i}$, $i=0,\dots,n-1$

$$\pi(i)\left(1-\frac{i}{n}\right)=\pi(i+1)\frac{i+1}{n} \quad \dots \quad \pi(i+1)=\pi(i)\cdot\frac{n-i}{i+1}$$

$$\pi(1)=\pi(0)\cdot n,\ \pi(2)=\pi(1)\cdot\frac{n-1}{2}=\frac{n(n-1)}{2}\cdot \quad \dots,\ \pi(j)=\pi(0)\cdot\binom{n}{j}$$

... binom. rozdělení

10, $\mathbb{P}(X_{n+1}=1 \mid X_n=0)=1$

$\mathbb{P}(X_{n+1}=k+1 \mid X_n=k)=p^k,\ k\geq 1$

$\mathbb{P}(X_{n+1}=k-1 \mid X_n=k)=q^k,\ k\geq 1$

$\mathbb{P}(X_{n+1}=k \mid X_n=k)=1-p^k-q^k,\ k\geq 1$

$0<p<q$
$p+q=1$

Rovnice det. rovnováhy

$\pi_0 \cdot P_{01} = P_{10}\,\pi_1 \ \dots\ \pi_0 \cdot 1 = q^{k+1}\cdot \pi_1 \ \dots\ \pi_1 = \pi_0 \cdot \frac{1}{q^k}$

$\pi_k\, P_{k,k+1} = P_{k+1,k}\,\pi_{k+1} \dots \pi_k \cdot p^k = q^{k+1}\cdot \pi_{k+1} \dots \pi_{k+1} = \pi_k \cdot \frac{p^k}{q^{k+1}}$

$= \pi_0 \cdot \frac{p^{\sum_{l=0}^{k} l}}{q^{\sum_{l=0}^{k+1} l}} = \pi_0 \cdot \frac{p^{k(k+1)/2}}{q^{(k+1)(k+2)/2}}$

$\sum \pi_k < \infty$ ... stac. rozdělení existuje!

Věta $\Rightarrow \pi_k = \frac{1}{\mu_k}$ ... střední doba návratu z 0 do 0 je konečná

... poz. rekurentní

11, Střední doba cesty z 1 do N je součet středních dob z k do k+1
$k=1,\dots,N-1$

$P_{k,k}=(1-p)^k,\ P_{k,k+1}=1-(1-p)^k$ ... $\mathbb{E}[z\ k \text{ do } k+1]$

$= \frac{1}{P_{k,k+1}} = \frac{1}{1-q^k}$

$\mathbb{E}[z\ 1 \text{ do } N] = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{1-q^k},\quad q=1-p$