Náhodné procesy

ZS 2020/21, FJFI ČVUT

2. Cvičení

1. Nechť $X = (X_t)_{t\geq 0}$ je gaussovský proces. Dokažte, že i

   a) $Y_t = 2X_t + 1$,

   b) $Z_t = X_{t^2}$

   jsou gaussovské procesy.

2. Buď $W = (W_t)_{t\geq 0}$ standardní Wienerův proces a položme $M_t := \max\limits_{0\leq s\leq t} W_s$. Dokažte, že i následující procesy jsou standardní Wienerovy:

   a) $(-W_t)_{t\geq 0}$;

   b) $(W_{s+t} - W_s)_{t\geq 0}$, $s > 0$ pevné;

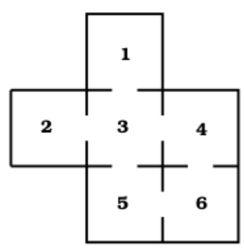
   c) $W^* = (W_t^*)_{t\geq 0} = (aW(t/a^2))_{t\geq 0}$;

   d) $(tW_{1/t})_{t\geq 0}$.

   Dále ukažte, že $M_t^* := \max_{0\leq s\leq t} W_s^* = \max_{0\leq s\leq t} aW_{s/a^2} = aM_{t/a^2}$

3. Najděte matici přechodu pravděpodobností pro náhodnou procházku na $\mathbb{Z}$ a pro úlohu ruinování hráče.

4. V bludišti běhá krysa. V každém kroce vyběhne náhodně jedněmi dveřmi z místnosti, ve které se právě nachází.



   (i) Napište matici přechodu pravděpodobností příslušného Markovského řetězce.

   (ii) Najděte stacionární rozložení.

   (iii) Krysa začíná v první místnosti. Jaká je střední doba návratu do první místnosti?

   (iv) Krysa začíná v první místnosti, v paté místnosti je past s kusem sýra. Jaká je střední doba prvního (a posledního...) příchodu do páté místnosti?

5. Opakujeme nezávislé hody mincí, při kterých padá Orel (O) nebo Hlava (H). Kolik hodů je třeba v průměru provést, než se objeví posloupnost vzorů HOHH?