

### 3. Cvičení

---

1.  $(M|M|3)$  Předpokládejme, že zákazníci, kteří chtějí platit v obchodě, jsou modelováni Poissonovým procesem - tedy že časy mezi dvěma příchody k pokladně jsou nezávislé proměnné s exponenciálním rozdělením se střední dobou 10 sekund. Zákazníci jsou obsluhováni třemi pokladnami a pokud jsou tyto plně obsazené, začne se vytvářet fronta společná pro všechny tři pokladny. Průměrná doba potřebná pro obslužení zákazníka na pokladně a zaplacení je 20 sekund a i tyto časy jsou nezávislé. Modelujte počet zákazníků v systému (na pokladnách i ve frontě) Markovovým řetězcem  $X$  se spojitým časem.
  - 1. Ukažte, že existuje stacionární stav systému.
  - 2. Jaký je průměrný počet právě obsluhovaných zákazníků ve stacionárním stavu?
  - 3. Jaký je průměrný počet zákazníků právě čekajících ve frontě ve stacionárním stavu?
  - 4. Jaká je pravděpodobnost, že přicházející zákazník nebude muset čekat ve frontě?
2.  $(M|M|\infty)$  Předpokládejme, že webová stránka je navštěvována zákazníky podle Poissonova procesu, tedy časy mezi dvěma po sobě jdoucími příchody návštěvníků jsou nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením se střední hodnotou  $1/\lambda$  pro parametr  $\lambda > 0$ . Dále předpokládejme, že čas, po který se návštěvníci dívají na tuto stránku, je exponenciálně rozdělená náhodná veličina se střední hodnotou  $1/\mu$  pro  $\mu > 0$  a že tyto časy jsou na sobě nezávislé. Konečně předpokládejme, že neexistuje limit počtu návštěvníků dané stránky. Kolik procent času má daná stránka v dlouhodobém horizontu právě  $k \in \mathbb{N}_0$  návštěvníků?
3. Nechť  $W(t) = (W^1(t), W^2(t))$  je dvourozměrný Wienerův proces, tj.  $W^1(t), W^2(t)$  jsou dva nezávislé reálné Wienerovy procesy. Najděte (pro  $R > 0$ ) pravděpodobnost  $\mathbb{P}(\|W(t)\|_2 < R)$ .
4. Pomocí generátoru náhodných čísel vyrobte jednu realizaci  $W_0, W_1, \dots, W_{100}$ . K této realizaci pak vyrobte zjemnění  $W_0, W_{1/2}, W_1, \dots, W_{99,5}, W_{100}$  a k ní pak zjemnění  $W_0, W_{1/4}, W_{1/2}, W_{3/4}, W_1, \dots, W_{100}$ .
5. Zkuste podobně nagenarovat trajektorie Wienerova můstku (a jejich zjemnění) a frakčního Wienerova procesu.
6. Najděte Karhunen-Loèvvův rozklad Wienerova můstku.
7. Použijte Karhunen-Loèvvův rozklad ke generování trajektorií a) Brouwnova pohybu na  $[0, 1]$ , b) Brownova můstku na  $[0, 1]$ , c) Ornstein-Uhlenbeckova procesu na  $[0, 1]$ .