2, Třídy náhodných procesů

a, Klasifikace ... • dle času I

1, $I=\mathbb{R}$, $I=[0,+\infty)$, $I=[a,b]$ ... procesy se spojitým časem

2, $I=\mathbb{N}_0$, $I=\mathbb{Z}$ ... procesy s diskrétním časem
časové řady

3, $I=\mathbb{R}^d$, $I\subset\mathbb{R}^d$ ... náhodné pole

• dle stavů ... E ... 1, $E=\mathbb{R}$ ... reálný náhodný proces (n.p.)

2, $E=\mathbb{C}$ ... komplexní n.p.

3, E konečná, nebo nekonečná spočetná
... náhodný řetězec

b, Gaussovské procesy

Definice: Náhodný proces nazveme gaussovským, pokud všechna jeho konečněrozm. rozdělení jsou gaussovská

$n=1$: μ,σ^2: $N(\mu,\sigma^2)$ ... hustota $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}=f_{\mu,\sigma^2}(x)$

μ ... střední hodnota

σ^2 ... rozptyl ... $E[X-\mu]^2$

$n>1$: $X=(X_1,\dots,X_n)$ ... • pro $X_1,\dots,X_n$ nezávislé, $X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$

$$X\sim N_n\Bigg(\underbrace{(\mu_1,\dots,\mu_n)^T}_{\mu},\underbrace{\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n^2\end{pmatrix}}_{\Sigma}\Bigg)$$

hustota $f_{\mu,\Sigma}(x)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}}e^{-\frac{(x_i-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}}$

$$=(2\pi)^{-n/2}(\det\Sigma)^{-1/2}\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu_i)^2}{\sigma_i^2}\right)=(2\pi)^{-n/2}(\det\Sigma)^{-1/2}\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)\right)$$

• obecně $X=(X_1,\dots,X_n)$ má n-rozměrné gaussovské rozdělení

$\mathcal{N}_n(\mu,\Sigma)$, kde $\mu\in\mathbb{R}^n$, $\Sigma\in\mathbb{R}^{n\times n}$ je pozitivně definitní (a tedy i regulární)

s $$f_X(x_1,\dots,x_n)=(2\pi)^{-n/2}(\det\Sigma)^{-1/2}\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)\right)$$

• ekvivalentně: $X=(X_1,\dots,X_n)$ je gaussovský, pokud pro $\mu=(\mathbb{E}X_1,\dots,\mathbb{E}X_n)$

a $C=\mathrm{Cov}(X_1,\dots,X_n)\dots C_{jk}=\mathbb{E}\left[(X_j-\mu_j)\overline{(X_k-\mu_k)}\right]$ platí

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i X_i=\langle\alpha,X\rangle\sim\mathcal{N}(\langle\alpha,\mu\rangle,\alpha^T C\alpha)$$

... jednorozměrné projekce jsou gaussovské

• $(X_t)_{t\in I}$, $X_t\sim\mathcal{N}(0,\varepsilon^2)$ nezávislé, se nazývá "bílý šum"

Věta: Buď $I\neq\emptyset$ a nechť jsou dány funkce $\mu: I\to\mathbb{R}$ a $C: I\times I\to\mathbb{R}$ poz. semidef.

Pak ex. náhodný proces X, který je gaussovský, $\mu=\mu_X$ a $C=C_X$.

Důkaz: (nástin, pro C poz. definitní)

• Pro $n\geq 1$ a $(t_1,\dots,t_n)\subset I$ položme $\mu^n=(\mu(t_1),\dots,\mu(t_n))$

a $C^n=\begin{pmatrix}C(t_1,t_1), & \dots, & C(t_1,t_n)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ C(t_n,t_1) & \dots & C(t_n,t_n)\end{pmatrix}>0.$

• Definujeme $f_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n)=f_{t_1,\dots,t_n}(x)=(2\pi)^{-n/2}\det(C^n)^{-1/2}\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu^n)(C^n)^{-1}(x-\mu^n)\right)$

a $F_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\dots\int_{-\infty}^{x_n} f_{t_1,\dots,t_n}(y_1,\dots,y_n)\,dy_n\dots dy_1$

• Zbývá ukázat, že tento systém je konzistentní (Fubini) & Daniell-Kolmogorov. $\square$

c, Stacionární procesy

Definice: Pro $E=\mathbb{R}$ a $I=\mathbb{R}$ nebo $I=[0,\infty)$ říkáme, že $X=(X_t)_{t\in I}$ je

- silně stacionární, pokud $F_{t_1,\dots,t_m}=F_{t_1+h,\dots,t_m+h}$ pro všechna $\{t_1,\dots,t_m\}\subset I$, $h\geq 0$
- slabě stacionární, pokud
  - a, X má konečné druhé momenty ... $\forall t\in I: \mathbb{E}|X_t|^2<+\infty$
  - b, $\mu_X\equiv$ konst. a $C_X(s,t)=C_X(s+h,t+h)$ pro $\forall s,t\in I$, $h\geq 0$

Pozn.: $\mathbb{E}|X_t|=\mathbb{E}\,1\cdot|X_t|\leq(\mathbb{E}\,1)^{1/2}(\mathbb{E}|X_t|^2)^{1/2}<+\infty$ ... μ_X je dobře definováno

Věta: 1, Pokud je X silně stacionární a má konečné druhé momenty, pak je X i slabě stacionární

2, Pokud je X slabě stac. a gaussovský, pak je X i silně stacionární

Důkaz: 1, • $\mu_X(t_1)=\mathbb{E}X_{t_1}=\int_{\mathbb{R}}x\,dF_{t_1}(x)=\int_{\mathbb{R}}x\,dF_{t_2}(x)=\mathbb{E}X_{t_2}=\mu_X(t_2)\equiv$ konst.

• $C_X(s,t)=\mathbb{E}(X_s-\mu(s))(X_t-\mu(t))=\mathbb{E}(X_s-\mu)(X_t-\mu)=$

$$=\int_{\mathbb{R}^2}(x-\mu)(y-\mu)\,dF_{s,t}(x,y)=\int_{\mathbb{R}}(x-\mu)(y-\mu)\,dF_{s+h,t+h}(x,y)=\mathbb{E}(X_{s+h}-\mu)(X_{t+h}-\mu)$$
$$=C(s+h,t+h)$$

2, Chceme $F_{t_1,\dots,t_m}=F_{t_1+h,\dots,t_m+h}$. Víme, že $\mu^1=(\mathbb{E}X_{t_1},\dots,\mathbb{E}X_{t_m})=(\mathbb{E}X_{t_1+h},\dots,\mathbb{E}X_{t_m+h})=\mu^2$

a $C^1=Cov(X_{t_1},\dots,X_{t_m})=Cov(X_{t_1+h},\dots,X_{t_m+h})=C^2$

Tedy

$$f_{t_1,\dots,t_m}(x)=(2\pi)^{-m/2}(\det C^1)^{-1/2}\exp\left(-\tfrac{1}{2}(x-\mu^1)^T(C^1)^{-1}(x-\mu^1)\right)=f_{t_1+h,\dots,t_m+h}(x).$$ ☒

d, Markovské procesy

Nechť I je množina s uspořádáním, tedy např. $I \subset \mathbb{R}$.

Řekneme, že pro každé $t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_m$, $\{t_0, \ldots, t_m\} \subset I$ platí

$$\mathbb{P}(X_{t_m} \in A \mid X_{t_{m-1}}, \ldots, X_{t_1}, X_{t_0}) = \mathbb{P}(X_{t_m} \in A \mid X_{t_{m-1}})$$ pro každou měřitelnou A.

Základní příklady (= Markovské procesy s diskrétním časem a/nebo diskr. oborem hodnot)

projdeme později extra.

Definice: Náhodný proces $(W_t)_{t \geq 0}$ je Wienerův proces, pokud platí

1, $W_0 = 0$ (skoro jistě)

2, Má nezávislé přírůstky, tj.

$\forall\ 0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_m$ jsou

$W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_m} - W_{t_{m-1}}$ nezávislé náhodné veličiny

3, Má stacionární přírůstky ... $W_t - W_s$ závisí jen na $t - s > 0$,

konkrétně $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2(t-s))$ pro $t > s$.

Poznámky: 1, Proces s nezávislými stacionárními přírůstky se nazývá **Lévyho** proces

2, Pro $\sigma = 1$ ... standardní Wienerův proces

3, Existence ... z Daniell-Kolmogorovy věty

4, Brownův pohyb ... "spojitá verze" Wienerova procesu

... W_t ... náh. proměnné na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Tedy X_t, W_t jsou funkce na Ω ... $W_t(\omega)$

Funkce $t \to W_t(\omega)$ pro ω pevné se nazývá trajektorie procesu W

Wienerův proces má "spojitou verzi" ... ex. $\tilde{W}_t$ tak, že

- spojité trajektorie: $t \to \tilde{W}_t(\omega)$ je spojitá funkce na $[0,\infty)$ pro s.v. ω
- $\tilde{W}$ je verze W: $\forall t: \mathbb{P}(W_t = \tilde{W}_t) = 1$

Vlastnosti trajektorií Wienerova procesu - později

- <u>Wienerův proces jako limita náhodných procházek</u>
  - částice se za čas $\delta > 0$ posune náhodně o $\pm\varepsilon$, tedy o ε doleva nebo doprava
  - $X^{\delta,\varepsilon}(n\delta) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j$, kde $\xi_1, \xi_2, \ldots = \pm\varepsilon$ jsou nezávislé
  - Pak $\mathbb{E} X^{\delta,\varepsilon}(n\delta) = 0$, $\operatorname{Var} X^{\delta,\varepsilon}(n\delta) = n \cdot \operatorname{Var} \xi_i = n\varepsilon^2$
  - Pro $n\delta \le t < (n+1)\delta$ položíme $X^{\delta,\varepsilon}(t) = X^{\delta,\varepsilon}(n\delta)$ ... po částech konstantní
  - Chceme přejít k limitě tak, aby tyto trajektorie konvergovaly

    Pro t pevné volme $\delta_n = t/n$ ... $n\varepsilon_n^2 = \sigma^2 t$ ... $\varepsilon_n^2 = \frac{\sigma^2 t}{n} = \sigma^2 \delta_n$

$\boxed{\sigma = 1}$: $\delta_n = 1/n$, $\varepsilon_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$W_n(t) = \sum_{1 \le k \le \lfloor nt \rfloor} \xi_k/\sqrt{n}, \quad \xi_k = \pm 1 \text{ nezávislé.}$$

Přirozeně se nabízí dvě otázky

- V jakém smyslu platí $W_n \to W$?
- Je možné dokazovat vlastnosti W z vlastností W_n a vzít limitu?

Věta: Buď W standardní Wienerův proces. Pak platí

1, W je gaussovský proces s $\mu_t = \mathbb{E} W_t = 0$ (centrovaný)

& $C_W(s,t) = \min\{s,t\}$, $s,t \geq 0$

2, konečněrozměrné hustoty jsou tvaru

$$f_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n) = f_{t_1}(x_1)\prod_{j=2}^{n} f_{t_j - t_{j-1}}(x_j - x_{j-1}), \text{ kde } f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{t}\right\}$$

Důkaz: • $t_0 := 0$; $\mu_t = \mathbb{E} W_t = \mathbb{E}(W_t - W_{t_0}) = 0$ $\quad (W_t \sim N(0,t))$

• $\underset{s \leq t}{R_W(s,t)} = C_W(s,t) = \mathbb{E}[W_s W_t] = \mathbb{E}[\underbrace{(W_t - W_s)W_s}_{\text{nezáv.}}] + \mathbb{E} W_s^2 = s = \min(s,t)$. $\quad W_s \sim N(0,s)$

• Chceme $(W_{t_1},\dots,W_{t_n})$ je gaussovský & spočítat hustotu

$$\begin{pmatrix} W_{t_1} \\ \vdots \\ W_{t_n} \end{pmatrix} = Z_n = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}}_{A_n} \underbrace{\begin{pmatrix} W_{t_1} - W_{t_0} \\ W_{t_2} - W_{t_1} \\ \vdots \\ W_{t_n} - W_{t_{n-1}} \end{pmatrix}}_{Y_n}$$

$z = A_n y$, $dz = \overbrace{|\det A_n|}^{=1} dy$

$$\mathbb{P}(Z_n \in B) = \mathbb{P}(A_n Y_n \in B) = \mathbb{P}(Y_n \in A_n^{-1}B) = \int_{A_n^{-1}(B)} f_{Y_n}(y)\,dy = \int_B f_{Y_n}(A_n^{-1}z)\,dz$$

$$\Rightarrow f_{Z_n} = f_{Y_n} \circ A_n^{-1}, \quad A_n^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \dots \quad A_n^{-1}\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 - \overset{``0}{z_0} \\ z_2 - z_1 \\ \vdots \\ z_n - z_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$f_{Y_n}(y) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_j - t_{j-1})}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{y_j^2}{t_j - t_{j-1}}\right) \dots f_{Z_n}(z) = f_{Y_n}(z_1 - z_0, \dots, z_n - z_{n-1}) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_j - t_{j-1})}} \exp\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{(z_j - z_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}\right.$$