Základy stochastické analýzy

- Opakování konvergencí

1, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ náhodné proměnné; říkáme, že $\varphi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi$ skoro jistě,

pokud $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(\omega) = \varphi(\omega)\ \ \forall \omega\in\Omega_0,\ \mathbb{P}(\Omega_0)=1.$

2, $\varphi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \varphi \iff \forall \varepsilon>0\ \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|\varphi_n-\varphi|>\varepsilon)=0$ ... v pravděpodob.

3, $\varphi_n \xrightarrow{L_p} \varphi \iff$ a, $\forall n\in\mathbb{N}: \varphi_n\in L_p(\mathbb{P})$

b, $\mathbb{E}|\varphi_n-\varphi|^p \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $p\geq 1$

- $p=1$ ... konvergence dle středu
- $p=2$ ... konvergence dle kvadratického středu

4, $\varphi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} \varphi \iff \mathbb{P}(\varphi_n\in B) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{P}(\varphi\in B)$ ... v distribuci $\forall B\subset\mathbb{R}$, borelovská

$\iff \forall B\subset\mathbb{R}$, borel: $\mathbb{E}[\chi_B\circ\varphi_n] \to \mathbb{E}[\chi_B\circ\varphi]$

$\iff \forall f\in C_b(\mathbb{R})$ $\mathbb{E}[f\circ\varphi_n] \to \mathbb{E}[f\circ\varphi]$

spojitá omezená

$\iff \forall f\in C_b(\mathbb{R}): \int_{\mathbb{R}} f(y)\,dF_{\varphi_n}(y) \to \int_{\mathbb{R}} f(y)\,dF_{\varphi}(y)$

$\iff F_{\varphi_n}(y) \to F_{\varphi}(y)$ ve všech bodech spojitosti $F_{\varphi}(y)$.

Platí: $\xrightarrow{s.j.} \Rightarrow \xrightarrow{\mathbb{P}} \cancel{\Rightarrow} \xrightarrow{\mathcal{D}}$

$\xrightarrow{L_p} \Rightarrow \xrightarrow{\mathbb{P}} \nearrow$

$\xrightarrow{\mathbb{P}} \Rightarrow \exists (n_k): \varphi_{n_k} \xrightarrow{s.j.} \varphi$

$\xrightarrow{L_q} \Rightarrow \xrightarrow{L_p}$, kde $q\geq p$.

• limita a spojitost náhodných procesů

Předp. $I \subseteq \mathbb{R}$, $t_0 \in I$ je hromadným bodem I ($t_0 \in I'$), $X = (X_t)_{t \in I}$ je reálný proces

Definice: Řekneme, že náhodný proces X má limitu v bodě t_0

a, v L_2, pokud existuje náhodná proměnná $Y \in L_2$: $\lim_{t \to t_0} \mathbb{E}|X_t - Y|^2 = 0$

b, v pravděpodobnosti, pokud ex. Y: $\mathbb{P}\text{-}\lim_{t \to t_0} X_t = Y$ ... tj. $X_t \xrightarrow[t \to t_0]{\mathbb{P}} Y$.

Věta: Buď $(X_t)_{t \in I}$ náhodný proces s konečným druhým momentem ($\forall t \in I: \mathbb{E}|X_t|^2 < +\infty$). Pak $\lim_{t \to t_0} X_t$ ex. v $L_2 \iff$ existuje konečná $\lim_{(t,s) \to (t_0,t_0)} R(t,s)$. $[R(t,s) = \mathbb{E}[X_t X_s]]$

Důkaz: $\Rightarrow$ ... víme, že ex. $Y \in L_2(\mathbb{P})$: $X_t \xrightarrow[t \to t_0]{L_2} Y$

spojitost sk. součinu

pak $\lim_{(t,s) \to (t_0,t_0)} \mathbb{E}[X_s X_t] = \lim_{(t,s) \to (t_0,t_0)} \langle X_s, X_t \rangle_{L_2(\mathbb{P})} = \langle Y, Y \rangle = \|Y\|_{L_2}^2 < +\infty$.

$\Leftarrow$: Z Bolzano-Cauchyho podmínky

$$\mathbb{E}|X_t - X_s|^2 = \langle X_t - X_s, X_t - X_s \rangle_{L_2(\mathbb{P})} = \mathbb{E}|X_t|^2 + \mathbb{E}|X_s|^2 - 2\mathbb{E}[X_t X_s]$$

$$= R(t,t) + R(s,s) - 2R(s,t) \xrightarrow[(s,t) \to (t_0,t_0)]{} 0$$

... z úplnosti $L_2(\mathbb{P})$ ... $\exists Y \in L_2(\mathbb{P})$: $X_t \xrightarrow[t \to t_0]{L_2} Y$.

OPAKOVÁNÍ

Základy stochastické analýzy

... Typy konvergencí: • s.j. $\varphi_n(\omega) \to \varphi(\omega)$ pro skoro všechna $\omega \in \Omega$

• $\mathbb{P}$

• L_p

• $\mathcal{D}$ ... $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$ ... $\Leftrightarrow F_{\varphi_n}(y) \to F_\varphi(y)$ ve všech bodech sp. F_φ.

Limity $L_2\text{-}\lim_{t \to t_0} X_t$, $\mathbb{P}\text{-}\lim_{t \to t_0} X_t$

$(X_t)_{t \in I}$ s konečnými druhými momenty ... $L_2\text{-}\lim_{t \to t_0} X_t$ ex. $\Leftrightarrow \exists \lim_{(t,s) \to (t_0,t_0)} R(t,s)$.

Věta: Buď $X=(X_t)_{t\in I}$ náhodný proces, Y náhodná proměnná.

Pak $X_t \xrightarrow[t\to t_0]{\mathbb{P}} Y \iff \exists \lim\limits_{(t,s)\to(t_0,t_0)} F_{X_t,X_s}(x,y) = F_{Y,Y}(x,y)$ $\quad(*)$

ve všech bodech spojitosti fce $F_{Y,Y}$.

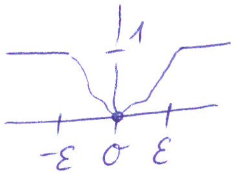
Pozn.: • $(*) \iff \forall f\in C_b(\mathbb{R}\times\mathbb{R}) : \mathbb{E} f(X_t,X_s) \xrightarrow[(t,s)\to(t_0,s_0)]{} \mathbb{E} f(Y,Y)$

• $F_{Y,Y}(x,y) = \mathbb{P}(Y\leq x, Y\leq y) = F_Y(\min\{x,y\})$

Důkaz: $\Rightarrow$: $X_t \xrightarrow[t\to t_0]{\mathbb{P}} Y \Rightarrow (X_t,X_s) \xrightarrow{\mathbb{P}} (Y,Y) \Rightarrow (X_t,X_s) \xrightarrow{\mathcal{D}} (Y,Y)$

$\iff \lim\limits_{(t,s)\to(t_0,t_0)} F_{X_t,X_s}(x,y) = F_{Y,Y}(x,y)$ v bodech spojitosti (x,y) fce $F_{Y,Y}$.

$\Leftarrow$: Volme $\varepsilon>0$ a lib. funkci $f_\varepsilon\in C_b$, $f_\varepsilon\geq 0$: $f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & x=0 \\ 1, & |x|\geq\varepsilon \end{cases}$



Pak $\mathbb{P}(|X_t-X_s|\geq\varepsilon) = \mathbb{P}(f_\varepsilon(|X_t-X_s|)\geq 1)$

$\underset{\text{Markovova ner.}}{\leq} \dfrac{\mathbb{E} f_\varepsilon(|X_t-X_s|)}{1} = \int_{\mathbb{R}^2} f_\varepsilon(|x-y|)\, dF_{X_t,X_s}(x,y)$

$\xrightarrow[(t,s)\to(t_0,s_0)]{\text{předp.}} \int_{\mathbb{R}^2} f_\varepsilon(|x-y|)\, \underbrace{dF_{Y,Y}(x,y)}_{\text{má nosič na } \{x=y\} \dots f_\varepsilon=0} = 0$

$\Rightarrow X_t \xrightarrow[t\to t_0]{\mathbb{P}} Y.$

Definice: Říkáme, že náhodný proces je

a, stochasticky spojitý v $t_0 \in I$, pokud

1, t_0 je izolovaný v I

nebo

2, t_0 je hromadný bod I a $X_t \xrightarrow[t \to t_0]{\mathbb{P}} X_{t_0}$.

b, spojitý v kvadratickém středu (v L_2), pokud

1, t_0 je izolovaný v I

nebo

2, t_0 je hromadný bod I a $X_t \xrightarrow[t \to t_0]{L_2} X_{t_0}$.

Věta: Buď X náhodný proces, $t_0 \in I$ hromadný. Pak

1, pokud $\forall t: \mathbb{E}|X_t|^2 < +\infty$, pak X je spojitý v t_0 dle kvadr. středu

v $t_0 \iff \lim\limits_{(s,t) \to (t_0,t_0)} R(s,t) = R(t_0,t_0)$

2, X je stochasticky spojitý v $t_0 \iff \lim\limits_{(t,s) \to (t_0,t_0)} F_{X_t X_s}(x,y) = F_{X_{t_0} X_{t_0}}(x,y)$

ve všech bodech spojitosti $F_{X_{t_0} X_{t_0}}(x,y)$.

Důkaz – kombinací předešlého, $Y = X_{t_0}$.

Pozn. Stochastická spojitost nesouvisí se spojitostí trajektorií!

Př. Poissonův proces

spojitost v $\mathbb{P}(.)$ v $t \geq 0$: $\mathbb{P}(N_{t+h} - N_t \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(N_{t+h} - N_t \geq 1)$

$$= 1 - \mathbb{P}(\underbrace{N_{t+h} - N_t}_{\sim Poi(\lambda h)} = 0) = 1 - e^{-\lambda h} \cdot \frac{(\lambda h)^0}{0!} = 1 - e^{-\lambda h} \xrightarrow{h \to 0+} 0.$$

stochasticky spojitý, nespojité trajektorie

Př. Wienerův proces – stochasticky spojitý? ... ano

– spojitý dle kvadratického středu... ano

Stochastický integrál podle Wienerova procesu

<u>Cíl</u>: Vybudovat $\int_0^t f(s)\,dW_s$ … $f(s)$… deterministická; nebo i náhodná funkce

W_s… náhodný proces; Wienerův proces jako nejdůležitější spec. případ

Pozn: …pokud by trajektorie měly omezenou tot. variaci, lze integrovat po trajektoriích $\left(\int_0^t f(s)\,dX_s\right)(\omega) = \int_0^t f(s)\,X_s'(\omega)\,ds$ …nelze pro W_s

Definice: Buď $X = (X_t)_{t\in[a,b]}$ proces s konečnými druhými momenty. Říkáme, že X má ortogonální přírůstky, pokud platí

$$E[(X_t - X_s)(X_v - X_u)] = 0 \quad \text{pro } \forall a \le s < t \le u < v \le b$$

… přírůstky přes disjunktní časové intervaly jsou nekorelované ($\neq$ nezávislé).

… OG proces

Věta: Buď $X = (X_t)_{t\in[a,b]}$ OG-proces na $[a,b]$, který je zároveň centrovaný ($\forall t\in[a,b]: EX_t = 0$) a L_2-spojitý zprava na $[a,b]$. Pak existuje právě jedna funkce $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ s

1, F je zprava spojitá

2, $F(t) = 0$ pro $\forall t \le a$

$F(t) = F(b)$ pro $\forall t \ge b$

$F(t) - F(s) = E(X_t - X_s)^2 \quad \forall a \le s < t \le b$

3, F je neklesající.

Důkaz: Položme $F(t) := 0,\ t \leq a$
$F(t) := \mathbb{E}|X_b - X_a|^2 = F(b),\ t \geq b$
$F(t) := \mathbb{E}|X_t - X_a|^2,\ \forall t \in [a,b]$

- Pro $a \leq s < t \leq b$ platí

$$F(t) = \mathbb{E}|X_t - X_a|^2 = \mathbb{E}|X_t - X_s + X_s - X_a|^2 = \mathbb{E}|X_t - X_s|^2 + \mathbb{E}|X_s - X_a|^2$$
$$+ 2\underbrace{\mathbb{E}(X_t - X_s)(X_s - X_a)}_{=0} = \mathbb{E}|X_t - X_s|^2 + F(s)$$

... tedy $F(t) - F(s) = \mathbb{E}|X_t - X_s|^2$ & F je neklesající

spojitost zprava $F(t+h) - F(t) = \mathbb{E}|X_{t+h} - X_t|^2 \xrightarrow{h \to 0^+} 0$ ... X je spojitý zprava v $L_2 \Rightarrow F$ je sp. zprava

$\Rightarrow$ existence
jednoznačnost: ... bod 2, určuje $G(t)$ pro $t \leq a$, $t \geq b$ i $G(t) - G(a) = \mathbb{E}|X_t - X_a|^2$. ☒

... přírůstková funkce

Příklad: Wienerův proces je OG-proces s $F^W(t) = F(t) = \mathbb{E}W_t^2 = t$.

F - přírůstková funkce generuje míru na $([a,b], \mathcal{B}[a,b])$ ... μ_F

$\mu_F((s,t]) = F(t) - F(s)$; $a \leq s < t \leq b$ & rozšíříme na $\mathcal{B}[a,b]$.

Můžeme definovat L_2 - prostor vzhledem k F:

$$L_2([a,b], \mu_F) = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ je } \mu_F\text{-měřitelná \& } \int_a^b |f(s)|^2 d\mu_F(s) < +\infty \}.$$

... označíme $L_2(F)$ .... $\int_a^b |f(s)|^2 dF(s)$.

Konstrukce integrálu vzhledem k OG-procesu

f ... integrand, $f \in L_2(F)$
X ... integrátor, X ... OG proces, centrovaný.

1. krok: $f \in L_2(F)$ jednoduchá funkce: $f(t) = \sum_{k=1}^{m} c_k \chi_{(t_{k-1}, t_k]}(t) + \cancel{c_0 \chi_{\{t_0\}}(t)}$, –/ /–

kde $c_k \in \mathbb{R}$, $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$.

Pro f jednoduchou: $\int_a^b f(s)\,dX_s := \sum_{k=1}^{m} c_k (X_{t_k} - X_{t_{k-1}})$.

1, Značíme: X: $I_X(f) = \int_a^b f(s)\,dX_s$ ... náhodná proměnná

2, $I_X(f) \in L_2(\mathbb{P})$ ... $\mathbb{E}[I_X(f)]^2 < +\infty$

3, $(I_X(f))(\omega) = \sum_{k=1}^{m} c_k (X_{t_k}(\omega) - X_{t_{k-1}}(\omega))$.

<u>Věta</u>: Buďte f, g dvě jednoduché funkce z $L_2(F)$. Pak platí

1, $I_X(f)$ je dobře definováno,

2, $\mathbb{E}\, I_X(f) = 0$ ... $I_X(f)$ je centrovaný

3, linearita: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $I_X(\alpha f + \beta g) = \alpha I_X(f) + \beta I_X(g)$

4, izometrie: $\langle I_X(f), I_X(g) \rangle_{L_2(\mathbb{P})} = \langle f, g \rangle_{L_2(F)}$

5, $Var(I_X(f)) = \mathbb{E}|I_X(f)|^2 = \int_a^b |f(t)|^2\,dF(t) = \|f\|^2_{L_2(F)} < +\infty$.

Důkaz: 1, Pro 2 různé zápisy f ve tvaru sumy vezmeme společné zjemnění ... $I_X(f)$ vyjde stejně ... dobře definováno.

2, $\mathbb{E}\, I_X(f) = \mathbb{E} \sum_{k=1}^{m} c_k (X_{t_k} - X_{t_{k-1}}) = \sum_{k=1}^{m} c_k (\mathbb{E} X_{t_k} - \mathbb{E} X_{t_{k-1}}) = 0$ (centrovaný X)

3, f, g & společné zjemnění:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{m} c_k \chi_{(t_{k-1}, t_k]}(t), \quad g(t) = \sum_{k=1}^{m} d_k \chi_{(t_{k-1}, t_k]}(t)$$

Pak $I_X(\alpha f + \beta g) = I_X\left(\sum_{k=1}^{m} (\alpha c_k + \beta d_k) \chi_{(t_{k-1}, t_k]}(t) \right) =$

$$= \sum_{k=1}^{m} (\alpha c_k + \beta d_k)(X_{t_k} - X_{t_{k-1}}) = \alpha I_X(f) + \beta I_X(g).$$

4, izometrie:

$$\mathbb{E}\left[I_X(f)I_X(g)\right] \overset{\text{společné zjemnění}}{=} \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{m} c_k (X_{t_k}-X_{t_{k-1}})\right)\left(\sum_{l=1}^{m} d_l (X_{t_l}-X_{t_{l-1}})\right)\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{m} c_k d_k \,\mathbb{E}(X_{t_k}-X_{t_{k-1}})^2 + \sum_{k\neq l} c_k d_l \underbrace{\mathbb{E}\left[(X_{t_k}-X_{t_{k-1}})(X_{t_l}-X_{t_{l-1}})\right]}_{=0 \;\dots\; OG-\text{proces}}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} c_k d_k \left(F(t_k)-F(t_{k-1})\right) = \int_a^b fg\,dF = \langle f,g\rangle_{L_2(F)}.$$

☑

5, ze 4, pro $g=f$.

Pozn: $f,g \in L_2(F)$ jednoduché $\dots \|I_X(f-g)\|_{L_2(\mathbb{P})} = \|I_X(f)-I_X(g)\|_{L_2(\mathbb{P})} = \|f-g\|_{L_2(F)}$.

- Rozšíření integrálu na $L_2(F)$.
  - Buď $f\in L_2(F)$ libovolná $\Rightarrow \exists (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jednoduché s $\|f_n - f\|_{L_2(F)} \to 0$
  - $\forall n\in\mathbb{N}: I_X(f_n) = \int_a^b f_n\,dX \dots$ dobře def.
  - $\|I_X(f_n)-I_X(f_m)\|_{L_2(\mathbb{P})} = \|f_n - f_m\|_{L_2(F)} \xrightarrow{m,n\to+\infty} 0 \quad \dots$ B.-C. $\dots$ v $L_2(F)$

    $\Rightarrow \left(I_X(f_n)\right)_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská v $L_2(\mathbb{P})$.
  - $\exists\, Y = L_2\text{-}\lim_{n\to+\infty} I_X(f_n)$, limita v $L_2(\mathbb{P})$.

Df: Buď X centrovaný OG-proces a $f\in L_2(F)$. Pak náhodná proměnná $Y\in L_2(\mathbb{P})$ je stochastický integrál funkce f vůči X a značíme

$$Y = I_X(f) = \int_a^b f(t)\,dX_t.$$

Věta: Buďte $f, g \in L_2(F)$. Pak platí

1, $I_X(f)$ nezávisí na volbě aproximační posloupnosti

2, $I_X(\cdot)$ je lineární zobrazení z $L_2(F)$ do $L_2(\mathbb{P})$.

3, $\mathbb{E}\, I_X(f) = 0$

4, $\mathbb{E}[I_X(f) I_X(g)] = \langle f, g \rangle_{L_2(F)}$

5, $\mathrm{Var}(I_X(f)) = \|f\|^2_{L_2(F)}$

6, Buď $(f_n)_{n=1}^{\infty} \xrightarrow[L_2(F)]{} f$ konvergentní posloupnost v $L_2(F)$. Pak $I_X(f_n) \xrightarrow[n\to\infty]{L_2(\mathbb{P})} I_X(f)$

Důkaz: 1, $f_n \xrightarrow[L_2(F)]{} f$, $g_n \xrightarrow[L_2(F)]{} f$ dvě posl. jednoduchých funkcí v $L_2(F)$.

Pak $\tilde{f}_{2n} = f_n$, $\tilde{f}_{2n+1} = g_n$ & $(\tilde{f}_n) \xrightarrow{L_2(F)} f$ ... $\tilde{f}_n$ je cauchyovská v $L_2(F)$

$\Rightarrow (I_X(\tilde{f}_n))_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská v $L_2(\mathbb{P})$ $\Rightarrow$ ex. limita

v $L_2(\mathbb{P})$: $\lim\limits_{n\to\infty} I_X(\tilde{f}_n) = \lim\limits_{n\to\infty} I_X(f_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} I_X(g_n)$ ... podposl. mají stejnou limitu.

$\Rightarrow I_X(f)$ nezávisí na apr. posloupnosti.

2, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(f_n) \xrightarrow{L_2(F)} f$, $(g_n) \xrightarrow{L_2(F)} g$ $\Rightarrow \alpha f_n + g_n \beta$ jsou také jednoduché

a $\alpha f_n + \beta g_n \to \alpha f + \beta g$: $I_X(\alpha f_n + \beta g_n) = \alpha I_X(f_n) + \beta I_X(g_n) \to \alpha I_X(f) + \beta I_X(g)$.

$\downarrow$

$I_X(\alpha f + \beta g)$

3, • $\mathbb{E}\,|I_X(\underset{\text{jednoduché}}{f_n}) - I_X(f)| \le \left(\mathbb{E}\,|I_X(f_n) - I_X(f)|^2\right)^{1/2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ... $I_X(f_n) \xrightarrow{L_2(\mathbb{P})} I_X(f)$

• $|\mathbb{E}\, I_X(f)| = |\mathbb{E}\, I_X(f) - \mathbb{E}\, I_X(f_n) + \mathbb{E}\, I_X(f_n)| \le |\mathbb{E}[I_X(f) - I_X(f_n)]| + \underbrace{|\mathbb{E}\, I_X(f_n)|}_{=0}$

$\le \mathbb{E}\,|I_X(f) - I_X(f_n)| \to 0.$

4, $\mathbb{E}[I_X(f_n) I_X(g_n)] = \langle f_n, g_n \rangle_{L_2(F)} \xrightarrow[\text{sk. součinu}]{\text{spojitost}} \langle f, g \rangle$

$\downarrow$

$\mathbb{E}[I_X(f) I_X(g)]$

5, $g \equiv f$ viz 4,

6, $f_n, f \in L_2(F)$, $f_n \xrightarrow{L_2(F)} f$

Pak $\| I_X(f_n) - I_X(f) \|_{L_2(\mathbb{P})} = \| I_X(f_n - f) \|_{L_2(\mathbb{P})} = \left(\mathbb{E} | I_X(f_n - f) |^2 \right)^{1/2}$

$= \left[\mathrm{Var}(I_X(f_n - f)) \right]^{1/2} = \| f_n - f \|_{L_2(F)} \to 0.$

29.11.2017

Pozn.: • $\int_{\mathbb{R}} f(s) dX_s$ pro X - OG-proces, L_2-spojitý zprava, centrovaný, $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}}$.

Lze ukázat, že $\exists F : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, $F(t) - F(s) = \mathbb{E}|X_t - X_s|^2$, $\forall t \geq s$

F je dána jednoznačně až na konstantu

$L_2(F)$: $\int_{-\infty}^{\infty} |f(s)|^2 dF(s) < +\infty$; $\int_{\mathbb{R}} f(s) dX_s := L_2\text{-}\lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int_a^b f(s) dX_s$,

pokud lim existuje.

Nejdůležitější případ $X = W$ ... centrovaný, L_2-spojitý, OG

• $F_W = F$: $F(t) - F(s) = \mathbb{E}|W_t - W_s|^2 = t - s$ ... μ_{F_W} je Lebesgueova míra

• $L_2(F) = L_2$: $\|f\|^2_{L_2(F)} = \int_a^b |f(s)|^2 ds \implies \int_a^b f(t) dW_t$

• $\mathbb{E} \left(\int_a^b f(s) dW_s \right)^2 = \int_a^b |f(s)|^2 ds = \|f\|^2_{L_2(F)}$.

Platí: $\int_a^b f(s) dW_s \sim \mathcal{N}(0, \|f\|^2_{L_2(F)})$

• pro f jednoduchou: $\int f dW = \sum_{i=1}^n c_i \underbrace{(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})}_{(t_i - t_{i-1})^{1/2} Z_i,\ Z_i \sim \mathcal{N}(0,1)}$

$\|f\|_2^2 = \sum_{i=1}^n c_i^2 (t_i - t_{i-1})$ $\sim \left[\sum c_i^2 (t_i - t_{i-1}) \right]^{1/2} \cdot Z$

• Pro f obecnou: $f_n \to f$

$$\int_a^b f(t)\,dW_t = L_2\text{-}\lim \int_a^b f_n(t)\,dW_t = L_2\text{-}\lim Z_n,\quad Z_n \sim \|f_n\|_{L_2(F)} \cdot \mathcal{N}(0;1)$$

$$= \|f\|_{L_2(F)} \cdot \mathcal{N}(0;1).$$

Poznámka: Obecnými členy stochastického integrálu jsou integrály typu

$$Z_t = \int_0^t Y_s\,dX_s$$

Tato obecná teorie (Itô calculus) je nad rámec přednášky, my uděláme jeden příklad

$$X_t = \int_0^t W_s\,dW_s,$$

kde $(W_t)_{t\geq 0}$ je Wienerův (standardní) proces.

PŘÍKLAD

$$X_t = \int_0^t W_s \, dW_s$$

- $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = t$
- $$X_t^m = \sum_{j=1}^{m} \underbrace{W_{t_{j-1}}}_{\frac{1}{2}(W_{t_j} + W_{t_{j-1}}) - \frac{1}{2}(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})} (W_{t_j} - W_{t_{j-1}})$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} \underbrace{(W_{t_j} + W_{t_{j-1}})(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})}_{W_{t_j}^2 - W_{t_{j-1}}^2} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} (W_{t_j} - W_{t_{j-1}})^2$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\left\{ W_{t_m}^2 - W_0^2 \right\}}_{\frac{W_t^2}{2}} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} (W_{t_j} - W_{t_{j-1}})^2$$

tento výraz (limitu) známe $\langle W \rangle_t = t$

$$\longrightarrow \frac{W_t^2}{2} - \frac{t}{2}$$

POZOR: Pokud by W_t byly diferencovatelné:

$$\int_0^t W_s \cdot W_s' \, ds = \left[\frac{W_s^2}{2} \right]_0^t = \frac{W_t^2}{2}$$

... tedy jiný výsledek – příspěvek 2. sumy by byl $\equiv 0$ ne t!

Riemannův integrál

Teorie integrálu $\int_a^b X_t\,dt$ lze vytvořit analogicky k reálnému případu

- $-\infty < a < b < +\infty$
- $D = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$
- $\|D\| = \max\limits_{1 \le j \le n} (t_j - t_{j-1})$ ... norma dělení
- Částečné součty: $S(D) = \sum\limits_{j=0}^{n-1} X_{t_j} (t_{j+1} - t_j)$
- Pokud pro každou posloupnost $(D_n)_{n \ge 1}$ s $\|D_n\| \to 0$ existuje (pro $(X_t)_{a \le t \le b}$ centrovaný) limita podle kvadratického středu $\lim\limits_{n \to +\infty} S(D_n)$, pak tato limita nezávisí na volbě (D_n) a nazývá se Riemannův integrál $I = \int_a^b X_t\,dt$.
- Pro (X_t) necentrovaný definujeme $\mu_t = \mathbb{E} X_t$ a
$$\int_a^b X_t\,dt = \int_a^b (X_t - \mu_t)\,dt + \int_a^b \mu_t\,dt \quad \text{... pokud oba integrály existují!}$$

Věta: Nechť $(X_t)_{a \le t \le b}$ je centrovaný proces s konečnými druhými momenty a autokovarianční funkcí $R(s,t)$. Pokud existuje (a je konečný) Riemannův integrál $R = \int_a^b \int_a^b R(s,t)\,ds\,dt$, pak existuje $\int_a^b X_t\,dt$.

Důkaz. Z B.-C. podmínky pro integrál plyne, že pro každé $\varepsilon > 0$ ex. $\delta > 0$, takže
$$\left| R - \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} R(u_l, v_m)(u_{l+1} - u_l)(v_{m+1} - v_m) \right| < \varepsilon \text{ pokud } \max(u_{l+1} - u_l) < \delta \text{ a } \max(v_{m+1} - v_m) < \delta.$$

Konvergence $\int_a^b X_t dt$ dokážeme také z B.-C. podmínky. Buď

$D: a = s_0 < s_1 < \dots < s_m = b$, $D': a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ s $\|D\|, \|D'\| < \delta$.

Pak $\mathbb{E}|S(D) - S(D')|^2 = \mathbb{E}\, S(D)^2 + \mathbb{E}\, S(D')^2 - 2\mathbb{E}[S(D)\cdot S(D')] =$

$$= \mathbb{E}\left\{\sum_{j=0}^{m-1} X_{s_j}(s_{j+1}-s_j)\right\}^2 + \mathbb{E}\left\{\sum_{k=0}^{n-1} X_{t_k}(t_{k+1}-t_k)\right\}^2 - 2\mathbb{E}\left\{\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1} \dots\right\}$$

$$= \sum_{j,j'=0}^{m-1} R(s_j, s_{j'})(s_{j+1}-s_j)(s_{j'+1}-s_{j'}) + \sum_{k,k'=0}^{n-1} R(t_k, t_{k'})(t_{k+1}-t_k)(t_{k'+1}-t_{k'})$$

$$- 2\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1} R(s_j, t_k)(s_{j+1}-s_j)(t_{k+1}-t_k) \quad - R - R + 2R < 4\varepsilon.$$

Cvičení: Spočtěte z definice $\int_0^t W_s ds$

$$\sum_{j=0}^{n-1} W_{\frac{jt}{n}}\left(\frac{(j+1)t}{n} - \frac{jt}{n}\right) = \frac{t}{n}\sum_{j=0}^{n-1} W_{\frac{jt}{n}} = \frac{t}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{j-1}\left(W_{\frac{(l+1)t}{n}} - W_{\frac{lt}{n}}\right)$$

$0 \le l < j \le n-1$

$$= \frac{t}{n}\sum_{l=0}^{n-2}\left(W_{\frac{(l+1)t}{n}} - W_{\frac{lt}{n}}\right)\sum_{j=l+1}^{n-1} 1$$

$$= \frac{t}{n}\sum_{l=0}^{n-2} Z_l\cdot(n-l-1)\cdot\sqrt{\frac{t}{n}} \dots$$ částečné součty jsou gaussovské proměnné

$\uparrow$ nezávislé gaussovské $N(0,1)$

$\dots \lim_{n\to\infty} \dots N(0, t^3/3)$.

$$\cong \left(\frac{t}{n}\right)^{3/2}\cdot Z\left(\sum_{l=0}^{n-2}(n-l-1)^2\right)^{1/2}, \quad Z \sim N(0,1)$$

$$\simeq \left(\frac{t}{n}\right)^{3/2}\cdot Z\cdot\left(\sum_{k=1}^{n-1} k^2\right)^{1/2} \sim \left(\frac{t}{n}\right)^{3/2}\sqrt{\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}}\, Z$$

$$\sim N\left(0, \frac{t^3}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right) \longrightarrow N(0, t^3/3).$$

Opakování: Stochastický integrál ... $\int_0^t f(s)\,dW_s$

- ortogonální přírůstky $\mathbb{E}[(X_t - X_s)(X_v - X_u)]$, $\forall a \leq s < t \leq u < v \leq b$ na $[a,b]$
- $\underbrace{F(t) - F(s)}_{\mu_F((s,t])} = \mathbb{E}(X_t - X_s)^2$; $F: \mathbb{R} \to [0,\infty)$
  ... $L_2([a,b], \mu_F) =: L_2(F)$.
- $f = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{(t_{k-1}, t_k]}(t)$ ... $\underbrace{\int_a^b f(s)\,dX_s}_{I_X(f)} = \sum_{k=1}^{n} c_k (X_{t_k} - X_{t_{k-1}})$
- zúplněním: $\int_a^b f\,dX_s$ definováno pro všechna $f \in L_2(F)$

Konstrukci $\int_0^t X_s \, ds$ lze využít k důkazu ergodických vlastností stacionárních procesů.

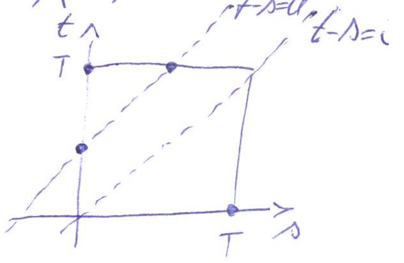
Připomeňme, že X je slabě stacionární, pokud má konečné druhé momenty, $\mu_X \equiv$ konst. a $C_X(t,s) = \tilde{C}_X(t-s)$. $\ldots \tilde{C}(t-s) = \tilde{C}(s-t)$

Pokud korelace mezi X_t a X_s rychle klesá se vzdáleností $|s-t|$, pak lze např. $\mu = \mathbb{E}X_t$ zjistit průměrem přes (skoro) libovolnou trajektorii.

Věta: Nechť $X = (X_t)_{t \geq 0}$ je slabě stacionární a nechť $\tilde{C}(t) \in L_1(0,\infty)$.

Pak
$$\lim_{T \to +\infty} \mathbb{E}\left| \frac{1}{T}\int_0^T X_s \, ds - \mu \right|^2 = 0.$$

<u>Důkaz:</u>
$$\mathbb{E}\left| \frac{1}{T}\int_0^T X_s \, ds - \mu \right|^2 = \mathbb{E}\left| \frac{1}{T}\int_0^T (X_s - \mu)\, ds \right|^2 = \frac{1}{T^2}\mathbb{E}\left[\int_0^T (X_s-\mu)\,ds \int_0^T (X_t - \mu)\,dt\right]$$
$$= \frac{1}{T^2}\mathbb{E}\int_{[0,T]^2} (X_s - \mu)(X_t - \mu)\, d(s,t) = \frac{1}{T^2}\int_{[0,T]^2} C(s,t)\, d(s,t)$$
$$= \frac{1}{T^2}\int_{[0,T]^2} \tilde{C}(t-s)\, d(s,t) \qquad \ldots \begin{matrix} u = t-s \\ v = t+s \end{matrix} \qquad \ldots \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \ldots \det = -2.$$
$$= \frac{1}{T^2}\int_{-T}^{T}\int_{|u|}^{2T-|u|} \tilde{C}(u)\, \frac{dv\,du}{2} \qquad \begin{matrix} -T \leq u \leq T \\ |u| \leq v \leq 2T-|u| \end{matrix}$$



$$= \frac{1}{T^2}\int_{-T}^{T} \tilde{C}(u)\, 2(T-|u|)\,\frac{du}{2} = \frac{2}{T^2}\int_0^T \tilde{C}(u)(T-|u|)\,du$$
$$= \frac{2}{T}\int_0^T \tilde{C}(u)\cdot\left(1 - \frac{|u|}{T}\right)du \leq \frac{2}{T}\int_0^T |\tilde{C}(u)|\,du \leq \frac{2}{T}\int_0^\infty |\tilde{C}(u)|\,du$$

$\longrightarrow 0$

pro $T \to +\infty$. ▨

Karhunen - Loéve Expansion ... rozklad

V analogii k Fourierovým řadám

$$f = \sum_n c_n \varphi_n, \text{ kde}$$

- $\{\varphi_n\}$ je ortonormální báze
- $c_n = \langle f, \varphi_n \rangle \in \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$)

chceme najít rozklad

$$X_t = \sum_n \xi_n \varphi_n(t) \quad , \; t \in [0;1], \text{ kde}$$

- $(\varphi_n)_n$ bude opět ortonormální báze $L_2(0;1)$
- ξ_n jsou náhodné proměnné

Z formálního výpočtu

$$\int_0^1 X_t \varphi_k(t)dt = \int_0^1 \sum_n \xi_n \varphi_n(t)\varphi_k(t)dt = \sum_n \xi_n \int_0^1 \varphi_n(t)\varphi_k(t)dt$$

$$= \sum_n \xi_n \delta_{kn} = \xi_k \text{ plyne, že bude nutné definovat}$$

$$\xi_k := \int_0^1 X_t \varphi_k(t)dt$$

- V ideálním případě bychom chtěli, aby $(\xi_n)_n$ byly nezávislé.

Obecně lze docílit pouze vzájemné nekorelovanosti

$$\dots \mathbb{E}(\xi_n \xi_m) = \lambda_n \delta_{nm}$$

$$\mathbb{E}(\xi_n \xi_m) = \mathbb{E}\left(\int_0^1 X_t \varphi_n(t)dt \cdot \int_0^1 X_s \varphi_m(s)ds \right)$$

$$= \mathbb{E}\left(\int_{[0;1]^2} X_t X_s \varphi_n(t)\varphi_m(s)d(s,t) \right) = \int_{[0;1]^2} \underbrace{\mathbb{E}[X_s X_t]}_{R(s,t)} \varphi_n(t)\varphi_m(s)d(s,t)$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^1 R(s,t)\varphi_n(t)dt \right) \varphi_m(s)ds$$

Funkce $s \to \int_0^1 R(s,t)\varphi_n(t)\,dt$ musí být tedy ortogonální k φ_m pro $n \neq m$

... φ_n volíme jako vlastní funkce operátoru

$$(Rf)(s) = \int_0^1 R(s,t) f(t)\,dt \quad \text{... pak je}$$

$$\mathbb{E}(\xi_n \xi_m) = \int_0^1 (R\varphi_n)(s)\,\varphi_m(s)\,ds = \lambda_n \delta_{mn}.$$

Věta (Karhunen-Loève) Nechť $(X_t)_{t\in[0,1]}$ je centrovaný proces s konečnými druhými momenty a autokorelační funkcí $R(s,t)$. Nechť $\{\lambda_n, \varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ je systém vlastních čísel a vlastních funkcí operátoru R. Pak

$$X_t = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \varphi_n(t), \quad t\in[0,1],$$

kde $\xi_n = \int_0^1 X_t \varphi_n(t)\,dt$, $\mathbb{E}\xi_n = 0$ a $\mathbb{E}(\xi_n\xi_m) = \lambda_n \delta_{mn}$.

Řada konverguje v kvadratickém středu k X_t, stejnoměrně v $t\in[0,1]$.

Důkaz: • $\mathbb{E}\xi_n = \int_0^1 (\mathbb{E}X_t)\cdot \varphi_n(t)\,dt = 0$

• $\mathbb{E}(\xi_n\xi_m) = \lambda_n \delta_{n,m}$ ... viz výše

• Pro $S_N(t) = \sum_{n=1}^{N} \xi_n \varphi_n(t)$ je

$$\mathbb{E}|X_t - S_N(t)|^2 = \mathbb{E}X_t^2 + \mathbb{E}S_N^2(t) - 2\mathbb{E}X_t S_N(t)$$

$$= \mathbb{E}X_t^2 + \mathbb{E}\sum_{k,l=1}^{N} \xi_k\xi_l \varphi_k(t)\varphi_l(t) - 2\mathbb{E}\Big(X_t \sum_{n=1}^{N} \xi_n \varphi_n(t)\Big)$$

$$= R(t,t) + \sum_{k=1}^{N} \lambda_k |\varphi_k(t)|^2 - 2\mathbb{E}\Big(X_t \sum_{n=1}^{N} \int_0^1 X_s \varphi_n(s)\,ds\, \varphi_n(t)\Big)$$

$$= R(t,t) + \sum_{k=1}^{N}{}' \lambda_k |\varphi_k(t)|^2 - 2 \sum_{n=1}^{N}{}' \int_0^1 E(X_t X_s) \varphi_n(s) \varphi_n(t)\, ds$$

$$= R(t,t) + \sum_{k=1}^{N}{}' \lambda_k |\varphi_k(t)|^2 - 2 \sum_{n=1}^{N}{}' \underbrace{\int_0^1 R(s,t) \varphi_n(s)\, ds}_{=(R\varphi_n)(t) = \lambda_n \varphi_n(t)} \varphi_n(t)$$

$$= R(t,t) - \sum_{k=1}^{N}{}' \lambda_k |\varphi_k(t)|^2. \qquad (*)$$

Naopak, je-li $(\varphi_n)_n$ ortonormální báze $L_2(0;1)$, pak $(\varphi_n(x)\cdot\varphi_m(y))_{n,m} = (\phi_{n,m})_{n,m}$ je ortonormální báze $L_2((0;1)\times(0,1))$ a platí

$$R(s,t) = \sum_{n,m}{}' \langle R, \phi_{n,m} \rangle \phi_{n,m}, \text{ kde}$$

$$\langle R, \phi_{n,m} \rangle = \int_{[0;1]^2} R(x,y)\, \phi_{n,m}(x,y)\, d(x,y) = \int_{[0;1]^2} R(x,y)\, \varphi_n(x) \varphi_m(y)\, d(x,y)$$

$$= \lambda_n \int_0^1 \varphi_n(y) \varphi_m(y)\, dy = \lambda_n \delta_{n,m}$$

Tedy $R(s,t) = \sum_n{}' \lambda_n \phi_n(s,t) = \sum_n{}' \lambda_n \varphi_n(s) \varphi_n(t)$ a

$$R(t,t) = \sum_{n=1}^{\infty}{}' \lambda_n |\varphi_n(t)|^2.$$

<u>Mercerova věta</u> říká, že tento ~~z~~rozvoj konverguje nejen v L_2, ale i bodově a stejnoměrně. Tedy $(*) \to 0$ stejnoměrně v $t \in [0;1]$. ∎

Poznámka: $R: L_2(0;1) \to L_2(0,1)$ je samoadjungovaný ($\langle Rf, h\rangle = \langle f, Rh\rangle$)

a pozitivně definitní $\langle Rf, f\rangle \geq 0 \quad \forall f, h \in L_2(0;1)$

a navíc kompaktní. Existence báze $(\varphi_n)_n$ plyne ze spektrální

teorie kompaktních samoadjungovaných operátorů.

Pro Wienerův proces $R(s,t) = \min(s,t)$

Hledáme funkce φ_n s $\int_0^1 R(s,t)\varphi_n(s)ds = \lambda_n \varphi_n(t)$ $\quad \dots \quad \dfrac{\varphi_n(0)=0}{R(s,0)=0}$

tedy $\int_0^t R(s,t)\varphi_n(s)ds + \int_t^1 R(s,t)\varphi_n(s)ds = \lambda_n \varphi_n(t)$

$\iff \int_0^t s\varphi_n(s)ds + t\int_t^1 \varphi_n(s)ds = \lambda_n \varphi_n(t)$

... levá strana je diferencovatelná ... $t\varphi_n(t) + \int_t^1 \varphi_n(s)ds - t\varphi_n(t) = \lambda_n \varphi_n'(t)$

$\iff \int_t^1 \varphi_n(s)ds = \lambda_n \varphi_n'(t)$ $\quad \dots \quad \varphi_n'(1) = 0$

... derivujeme ještě jednou $\quad -\varphi_n(t) = \lambda_n \varphi_n''(t)$ s okr. podmínkami $\begin{matrix} +\varphi_n'(1)=0 \\ \varphi_n(0)=0 \end{matrix}$

Pro $\lambda_n < 0 \dots FS = \left\{ e^{\sqrt{-\frac{1}{\lambda_n}}t}, e^{-\sqrt{-\frac{1}{\lambda_n}}t} \right\}$ ... jediné řešení je $\varphi_n \equiv 0$

Pro $\lambda_n = 0$ ... taky

Pro $\lambda_n > 0 \dots FS = \left\{ \cos\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda_n}}\right), \sin\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda_n}}\right) \right\} \dots \varphi_n(t) = c_1 \cos\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda_n}}\right) + c_2 \sin\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda_n}}\right)$

$\varphi_n(0) = 0 \dots c_1 = 0$; $\varphi_n'(1) = \frac{c_2}{\sqrt{\lambda_n}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right) = 0$ ... má nenulové

řešení jen pokud $\cos(1/\sqrt{\lambda_n}) = 0 \dots \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} = \frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{(2k+1)\pi}{2}$, $k = 0, 1, \dots$

$\lambda_k = \left(\frac{2}{2k+1}\right)^2 \cdot \frac{1}{\pi^2}$, $\varphi_k(t) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{2k+1}{2}\pi t\right)$

↑ normalizační faktor ... $\|\varphi_n\|_2 = 1$.

Tedy $W_t = \sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty} \xi_n \sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi t\right)$, $t \in [0;1]$

Zbývá určit ξ_n, $n=0,1,\ldots$

- částečné sumy k $\xi_n = \int_0^1 X_t\, \varphi_n(t)\,dt$ jsou gaussovské proměnné, a i jejich limita je gaussovská. Z $\mathbb{E}(\xi_m \xi_n) = \lambda_n \delta_{mn}$ plyne $\mathbb{E}\,\xi_n^2 = \lambda_n$ ... Celkem je tedy $\xi_n = \sqrt{\lambda_n}\, Z_n$, $Z_n \sim N(0,1)$ nezávislé

$$\Rightarrow W_t = \sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} Z_n \cdot \frac{2}{(2n+1)\pi} \sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi t\right).$$

Cvičení: Použijte tento rozvoj pro generování trajektorií Wienerova procesu!

2, Wienerův můstek $B_t := W_t - tW_1$ ... $B_0 = B_1 = 0$

Najděte $R(s,t)$ & Karhunen-Loève rozklad

$\hookrightarrow R(s,t) = \min(s,t) - ts$

$$B_t = \sum_{k=1}^{\infty} Z_k \frac{\sqrt{2}\sin(k\pi t)}{k\pi}.$$