3. Kapitola

… Histogramy & Klasifikace

• Jak z jpdf vlastních čísel vyrobíme histogramy vlastních čísel!

$$\ldots \rho(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx_2 \ldots dx_N \, \rho(x, x_2, \ldots, x_N)$$

„Odhození!" Pro $n(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \delta(x - x_i)$ je $\int_a^b n(x')dx'$ podíl

vl. čísel ležících v $[a,b]$. … H & $x_1, \ldots, x_N$ je determ. pevná matice + vl. čísla

Pokud H je náhodná matice, pak $n(x)$ je náhodná „funkce" (resp. náhodná míra)

Její střední hodnota tedy bude opět míra

• $$n(A) = \int_A n(x)dx = \int_A \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \delta(x - x_i)\right] dx = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \int_A \delta(x - x_i) dx$$

• $[\mathbb{E} n][A]$ … generujeme $x_1, \ldots, x_N$ podle $\rho(x_1, \ldots, x_N)$, spočteme $n(A)$ a bereme průměr…

$$[\mathbb{E} n][A] = \int_{\mathbb{R}^N} \rho(x_1, \ldots, x_N) \int_A \left[\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \delta(x - x_j)\right] dx \, d(x_1, \ldots, x_N)$$

$$= \int_A \int_{\mathbb{R}^N} \rho(x_1, \ldots, x_N) \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \delta(x - x_j) \, d(x_1, \ldots, x_N) dx$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \int_A \int_{\mathbb{R}^N} \varrho(x_1, \dots, x_N)\, \delta(x - x_j)\, d(x_1, \dots, x_N)\, dx$$

$$= \int_A \int_{\mathbb{R}^N} \varrho(x_1, \dots, x_N)\, \delta(x - x_1)\, d(x_1, \dots, dx_N)\, dx$$

$$= \int_A \underbrace{\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \varrho(x, x_2, \dots, x_N)\, d(x_2, \dots, x_N)}_{\varrho(x)}\, dx$$

$\varrho(x)$ ... Tedy $\varrho(x) = \mathbb{E}\, n(x)$.

průměrná spektrální hustota

- Lze vzít limitu $\varrho(x)$ pro $N \to +\infty$? jen po správné normalizaci ... $\lim_{N\to+\infty} \sqrt{\beta N}\, \varrho(\sqrt{\beta N}\, x) = \frac{1}{\pi}\sqrt{2 - x^2}$ ... Wignerův polokruhový zákon.

Daysmanova klasifikace

dělení náhodných čtvercových matic s reálnými vl. čísly

1, Nezávislé prvky (=elementy) ... prvky jsou nezávislé (až na případné požadavky na symetrii) ... Wignerovy matice

Např. matice sousednosti (adjacency matrix) náhodných grafů

... dva vrcholy jsou spojeny s pravd. p:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 1 & \ddots & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \ddots & & \ddots \\ & \vdots & & \ddots & \\ & & \ddots & & 0 \end{pmatrix}$$

2, Rotačně invariantní

Pro lib. U ortogonální/unitární transformaci $\mathbb{R}^N$ (resp. $\mathbb{C}^N$) je

H i $H' = UHU^{-1}$ stejně pravděpodobné

... $\rho[H] = \rho[UHU^{-1}]$

... Wishartovy matice $W = HH^T$, kde H je $N\times M$, $M \geq N$ matice s nezávislými Gaussovskými prvky

... v průniku těchto tříd jsou jen Gaussovské matice

$$\rho(H_s) = \prod_{i=1}^{N} \frac{\exp(-(H_s)_{ii}^2/2)}{\sqrt{2\pi}} \prod_{i<j} \frac{\exp(-(H_s)_{ij}^2)}{\sqrt{\pi}}$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{až na konst.}}}{\cong} \prod_{i=1}^{N} \exp(-(H_s)_{ii}^2/2) \prod_{i<j} \exp(-(H_s)_{ij}^2/2) \prod_{j<i} \exp(-(H_s)_{ij}^2/2)$$

$$= \prod_{i,j=1}^{N} \exp(-(H_s)_{ij}^2/2) = \exp\left(-\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(H_s^2)\right)$$

... protože $(H_s^2)_{jj} = \sum_{k=1}^{N} (H_s)_{jk}(H_s)_{kj} = \sum_{k=1}^{N} (H_s)_{jk}^2$;

$$\Rightarrow \operatorname{Tr}(H_s^2) = \sum_{j,k=1}^{N} (H_s)_{jk}^2 .$$

Pro $H_s' = UH_sU^{-1}$ je $(H_s')^2 = UH_sU^{-1}UH_sU^{-1} = UH_s^2U^{-1}$

Z „cykličnosti stopy" $\operatorname{Tr}(ABC) = \operatorname{Tr}(BCA) = \operatorname{Tr}(CAB) \neq \operatorname{Tr}(ACB)$ ...

$$\operatorname{Tr}((H_s')^2) = \operatorname{Tr}(UH_s^2U^{-1}) = \operatorname{Tr}(H_s^2U^{-1}U) = \operatorname{Tr}(H_s^2).$$

4. Kapitola

Coulombův plyn

$\sqrt{\beta N}\,\rho(\sqrt{\beta N}x) \longrightarrow \frac{1}{\pi}\sqrt{2-x^2}$

... jpdf Gauss $\Longrightarrow$ Wignerův polokruhový zákon

$$\rho(x_1,\dots,x_N)=\frac{1}{Z_{N,\beta}}\,e^{-\frac{1}{2}(x_1^2+\dots+x_N^2)}\prod_{j<k}|x_j-x_k|^\beta$$

$$Z_{N,\beta}=(2\pi)^{N/2}\prod_{j=1}^{N}\frac{\Gamma(1+j\beta/2)}{\Gamma(1+\beta/2)}$$

Abychom mohli vzít limitu, přeškálujeme vlastní čísla

$$x_i \longrightarrow x_i\sqrt{\beta N} \quad \dots \quad x_i^{*}=x_i'\sqrt{\beta N}$$

$$\tilde\rho(x_1',\dots,x_N')=(\beta N)^{N/2}\rho(\sqrt{\beta N}x_1',\dots,\sqrt{\beta N}x_N')\cdot\boxed{\frac{1}{Z_{N,\beta}}}$$

$$=(\beta N)^{N/2}e^{-\frac{\beta N}{2}(x_1'^2+\dots+x_N'^2)}\prod_{j<k}|x_j'-x_k'|^\beta\cdot(\beta N)^{\frac{1}{2}\frac{N(N-1)}{2}\cdot\beta}\cdot\frac{1}{Z_{N,\beta}}$$

$$\boxed{Z_{N,\beta}'}=\underbrace{(\beta N)^{N/2+\frac{1}{2}\cdot\frac{N(N-1)}{2}\beta}}_{C_{N,\beta}}\int_{\mathbb{R}^N}e^{-\frac{\beta N}{2}(x_1'^2+\dots+x_N'^2)}\prod|x_j'-x_k'|^\beta\,d(x_1',\dots,x_N')$$

$$=\frac{1}{Z_{N,\beta}'}\,e^{-\frac{\beta N}{2}(x_1'^2+\dots+x_N'^2)}\prod_{j<k}|x_j'-x_k'|^\beta$$

$$=\frac{1}{Z_{N,\beta}'}\,e^{-\beta N^2 V[x]}\;;\quad V[x']=\frac{1}{2N}\sum_i(x_i')^2-\frac{1}{2N^2}\sum_{i\neq j}\ln|x_i'-x_j'|$$

přechod $i<j$ na $i\neq j$.

$V[x]$ ... energetický člen

$e^{-\beta N^2 V[x]}$ ... Gibbs-Boltzmannova váha

- Stejně jako dříve … člen $\|x\|_2^2$ tlačí hodnoty dohromady, log. člen zabraňuje kolapsu do jediného bodu … uvězněné částice
- Integrace funkce $e^{-F(x)}$ … největší příspěvek je v okolo minima funkce F!
- 2D potenciál je logaritmický … $\Delta f(r) = 0$ …
  … Máme tedy plyn ve 2D omezený na přímku
- Řada triků a fíglů vedoucích k výpočtu $F = \frac{1}{\beta}\ln(Z_{N,\beta})$ … "free energy" resp. $Z_{N,\beta}$ & $\lim_{N\to+\infty}$!

- Uvažujme normalizovanou sčítací funkci
$$n(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta(x-x_i)$$
… náhodná funkce, $\int_{\mathbb{R}} n(x)\,dx = 1$, $n(x) \geq 0$
… součet Diraků … pro $N\to\infty$ v podstatě hladká …

Např. $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta(x-\frac{i}{N}) \longrightarrow \chi_{[0;1]}$.
$$\frac{1}{N}\int_{\mathbb{R}}\sum_{i=1}^{N}\delta(x-\tfrac{i}{N})f(x)\,dx = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}f(\tfrac{i}{N}) \longrightarrow \int_0^1 f(x)\,dx$$
pro $\forall f\in C^\infty(\mathbb{R})$.

• Pro N konečné je prostor $(x_1,\dots,x_N)$ a prostor $\{n(x),(x_1,\dots,x_N)\}$ de fakto identický (& konečně-dimenzionální)

Chceme-li ale uvažovat limity pro $N\to\infty$ umíme integrovat i přes hladké n ... nekonečně-dim.

$\Rightarrow$ Na prostoru funkcí $\{n\geq 0, \int n=1\}$ uvažujeme "míru" $\mathcal{D}$

... "Pathintegral"

"Feynmanův dráhový integrál"

Technicky vzato uvažujeme posloupnost $\mathcal{D}_N$ & jejich limitu...

... Máme tedy $1=\int \mathcal{D}_N[n(x)]\,\delta\left[n(x)-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta(x-x_i)\right]$

• Platí: $\sum_{i=1}^{N} f(x_i) = N\int_{\mathbb{R}} n(x)f(x)\,dx$, $\sum_{i,j=1}^{N} g(x_i,x_j) = N^2\iint_{\mathbb{R}\mathbb{R}} n(x)n(x')g(x,x')\,dx\,dx'$

Tedy $\frac{1}{2N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 = \frac{1}{2N}\cdot N\int_{\mathbb{R}} n(x)x^2\,dx$

Při přepisu $\frac{1}{2N^2}\sum_{i\neq j}\ln|x_i-x_j|$ je problém s diag. členy... $\ln|x_i-x_i| = -\infty$

$$=\frac{1}{2N^2}\left[\sum_{i,j=1}^{N}\ln|x_i-x_j| - \sum_{i=1}^{N}\ln\Delta(x_i)\right]$$

$$=\frac{1}{2N^2}\times N^2\iint_{\mathbb{R}^2} dx\,dx'\left[n(x)n(x')\ln|x-x'|\right] - \frac{1}{2N^2}\times N\int_{\mathbb{R}} dx\left[n(x)\ln\Delta(x)\right]$$

$\Delta(x)$ ... korekční člen, vyruší divergenci do 1. řádu...

... nebo vynechat diagonálu... problém s limitou...

Dvě vsuvky:

1, Integrální reprezentace Diraca

- $\mathcal{F}f(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx$; $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi$

- Fourierova transformace distribucí je definována dualitou $\langle \mathcal{F}\varphi, f \rangle = \langle \varphi, \mathcal{F}f \rangle$

... motivováno $\int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}f)(x) g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathcal{F}g(x) dx$

- Fourierova transformace Diraca

$$\langle \mathcal{F}\delta_0, f \rangle = \langle \delta_0, \mathcal{F}f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(\xi) \delta_0(\xi) d\xi = \mathcal{F}f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

$$= \langle 1, f \rangle \ \dots \ \mathcal{F}\delta_0 = 1$$

- Při posunutí

$$\langle \mathcal{F}\delta_t, f \rangle = \langle \delta_t, \mathcal{F}f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(\xi) \delta(\xi - t) d\xi = \mathcal{F}f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \cdot t} dx$$

$$= \langle e^{-2\pi i x \cdot t}, f \rangle$$

- Naopak Dirac je Fourierovou transformací konst. (resp. kompl. jedn.)

- $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}f)(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-2\pi i y \xi} dy \right\} e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi$

$$\text{``}=\text{''} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \xi (x-y)} d\xi \right)}_{\substack{\delta(\cdot - x) \dots \delta_x \\ = \delta(y-x) \dots = \delta_x(y)}} dy$$

Integrace pomocí sedlového bodu

$$I(A)=\int_{x_1}^{x_2} dx\, f(x)\, e^{Ag(x)}\,,\quad A>0\,,\quad x_1<x_2$$

Pro velké hodnoty A je hodnota $I(A)$ dána hlavní hodnotou $g(x)$ v bodě glob. maxima

- Nechť $x_0\in(x_1,x_2)$ je bod glob. maxima, $x=x_0+\frac{y}{\sqrt{A}}$

- $$Ag(x)=A\left[g(x_0)+g'(x_0)(x-x_0)+\frac{g''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\ldots\right]=$$
$$=A\left[g(x_0)+0+\frac{g''(x_0)}{2}\cdot\frac{y^2}{A}+\frac{g'''(x_0)}{6}\cdot\frac{y^3}{A^{3/2}}+\ldots\right]$$
$$=Ag(x_0)+\frac{1}{2}\,\frac{g''(x_0)}{\cancel{A}}\,y^2+\frac{g'''(x_0)}{6\sqrt{A}}\,y^3+\ldots$$

- $$e^{Ag(x_0)}=e^{Ag(x_0)}\cdot e^{y^2g''(x_0)/2}\cdot\left(1+\frac{y^3g'''(x_0)}{6\sqrt{A}}+\ldots\right)$$

- $$I(A)=\frac{f(x_0)e^{Ag(x_0)}}{\sqrt{A}}\int_{y_1}^{y_2}dy\, e^{y^2g''(x_0)/2}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}A^{-n/2}P_n(y)\right)$$

$\Rightarrow$ Asymptotický rozvoj $I(A)\sim\frac{f(x_0)e^{Ag(x_0)}}{1}\sqrt{\frac{2\pi}{-Ag''(x_0)}}\left(1+\ldots A^{-?}\right)$

K záměně dvojité sumy za integrál

- $n_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}{}' \delta\left(x - \frac{i}{N}\right)$
- $n_N(x) \longrightarrow \chi_{[0;1]}(x)$ ... $\int_{\mathbb{R}} n_N(x) f(x)\,dx = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}{}' \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\delta(x-x_i)\,dx$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}{}' f(i/N) \to \int_0^1 f(x)\,dx.$$

- $\sum_{i\neq j}{}' \ln|x_i - x_j| = \sum_{i\neq j}{}' \ln\left|\frac{i}{N} - \frac{j}{N}\right| = \sum_{i\neq j}{}' \ln\left|\frac{i-j}{N}\right|$ ... $k = |i-j|$

$$= 2\sum_{k=1}^{N-1}{}'(N-k)\ln\frac{k}{N}\ ;\quad \frac{1}{2N^2}\sum_{i\neq j}{}' \ln|x_i - x_j| = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1}{}'\left(1-\frac{k}{N}\right)\ln\left(\frac{k}{N}\right)$$

$$\longrightarrow \int_0^1 (1-t)\ln(t)\,dt = -\frac{3}{4}$$

- $\int_0^1\int_0^1 \ln|s-t|\,ds\,dt = 2\int_0^1\int_t^1 \ln|s-t|\,ds\,dt = \dots = -\frac{3}{2}$ ... $\boxed{\cdot\frac{1}{2}}$

.. žádný Δ člen?!

Ještě k "slabé konvergenci":

- $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta(x-\frac{i}{N}) \longrightarrow \chi_{[0,1]}$

- $\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta(x-\frac{i}{N})\right]^{\wedge}(\xi) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\delta(x-\frac{j}{N})^{\wedge}(\xi)$

$$= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} e^{-2\pi i \xi \frac{j}{N}} = \frac{1}{N} e^{-2\pi i \xi/N}\sum_{j=0}^{N-1}\left[e^{-2\pi i \xi/N}\right]^{j}$$

$$\overset{\xi\neq 0}{=} \frac{1}{N}\underbrace{e^{-2\pi i \xi/N}}_{\downarrow 1}\frac{1-e^{-2\pi i\xi}}{1-e^{-2\pi i \xi/N}} \sim \frac{1}{N}\frac{1-e^{-2\pi i\xi}}{2\pi i \xi/N} \qquad 1-e^{x}\sim -x$$

$$= \frac{1-e^{-2\pi i \xi}}{2\pi i \xi}$$ ... Fourierova transformace $\chi_{[0,1]}$.

- Nebo "integrální reprezentace Diraca"

$$m_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\delta(x-\frac{j}{N}) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \xi(x-j/N)}\,d\xi$$

$$= \frac{1}{N}\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \xi x}\sum_{j=1}^{N} e^{-2\pi i \xi j/N}\,d\xi = \frac{1}{N}\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i\xi x} e^{-2\pi i \xi/N}\frac{1-e^{-2\pi i \xi}}{1-e^{-2\pi i\xi/N}}\,d\xi$$

$$\longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \xi x}\cdot\frac{1-e^{-2\pi i\xi}}{2\pi i \xi}\,d\xi = \left[\frac{1-e^{-2\pi i \xi}}{2\pi i\xi}\right]^{\vee}(x) = \chi_{[0,1]}(x)$$

- Uvažujeme-li $n(x)$ místo x, je třeba připsat i
  - $V[x]$ jako $V[n(x)]$

$$V[x] = \frac{1}{2N}\sum_{i=1}^{N}{}' x_i^2 - \frac{1}{2N^2}\sum_{i\neq j}{}' \ln|x_i - x_j|$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} x^2 n(x)\,dx - \frac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}^2} n(x)n(x')\ln|x-x'|\,dx\,dx' + \cancel{\frac{1}{2N}\int_{\mathbb{R}} [n(x)\ln[n(x)]]dx}$$

$$=: V[n(x)]$$

tento člen kompenzuje divergenci předchozího

- $$Z_{N,\beta} = C_{N,\beta}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\beta N^2 V[x]}\,d(x_1,\dots,x_N) = C_{N,\beta}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\beta N^2 V[n(x)]}\,d(x_1,\dots,x_N)$$

Pro N pevné uvažujeme jen funkce typu $n(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}{}' \delta(x-x_i)$ ... A_N

... a na nich má tedy míru $\mathcal{D}_N$

$$1 = \int 1\,\mathcal{D}_N[n(x)] = \int \delta\left[n(x) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}{}'\delta(x-x_i)\right]\mathcal{D}_N(n(x))$$

$$\shortparallel$$

$$\int_{A_N} 1\,\mathcal{D}_N[n(x)]$$

$$\Rightarrow Z_{N,\beta} = C_{N,\beta}\int e^{-\beta N^2 V[n(x)]}\underbrace{\int_{\mathbb{R}^N}\delta\left[n(x) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}{}'\delta(x-x_i)\right]d(x_1,\dots,x_N)}_{I_N[n(x)]}\mathcal{D}_N[n(x)]$$

$$I_N[m(x)] = \int \mathcal{D}[\hat{m}(x)] \int_{\mathbb{R}^N} \prod_{j=1}^{N} dx_j \, \exp\left\{ iN \int dx \, \hat{m}(x) \left[m(x) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \delta(x - x_i) \right] \right\}$$

$$= \int \mathcal{D}[\hat{m}(x)] \int_{\mathbb{R}^N} d(x_1, \dots, x_N) \, \exp\left\{ iN \int dx \, \hat{m}(x) m(x) \right\} \cdot \exp\left\{ -i \int_{\mathbb{R}} dx \, \hat{m}(x) \sum_{j=1}^{N} \delta(x - x_j) \right\}$$

$$= \int \mathcal{D}[\hat{m}(x)] \exp\left\{ iN \int dx \, \hat{m}(x) m(x) \right\} \int_{\mathbb{R}^N} \exp\left\{ -i \int_{\mathbb{R}} dx \, \hat{m}(x) \sum_{j=1}^{N} \delta(x - x_j) \right\} d(x_1, \dots, x_N)$$

$$= \int \mathcal{D}[\hat{m}(x)] \exp\left\{ iN \int dx \, \hat{m}(x) m(x) \right\} \cdot \prod_{j=1}^{N} \int_{\mathbb{R}} \exp\left\{ -i \int_{\mathbb{R}} dx \, \hat{m}(x) \delta(x - x_j) \right\} dx_j$$

$$= \quad -\text{''}- \quad \cdot \left[\int_{\mathbb{R}} \exp\left\{ -i \int_{\mathbb{R}} dx \, \hat{m}(x) \delta(x - y) \right\} dy \right]^N$$

$$= \int \mathcal{D}[\hat{m}(x)] \exp\left\{ iN \int dx \, \hat{m}(x) m(x) \right\} \cdot \left[\int_{\mathbb{R}} \exp\left\{ -i \hat{m}(y) \right\} dy \right]^N$$

$$= \int \mathcal{D}[\hat{m}(x)] \cdot \left\{ \exp\left\{ i \int dx \, \hat{m}(x) m(x) \right\} \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-i \hat{m}(y)} dy \right\}^N$$

Hledáme sedlový bod { } ... bez N-té mocniny

... Derivace v každém směru $h(x)$ musí být nulová...

$$\exp\left\{i\int[\hat{m}(x)+h(x)]\,m(x)\,dx\right\}\int_{\mathbb{R}} e^{-i[\hat{m}(y)+h(y)]}dy$$

$$-\exp\left\{i\int\hat{m}(x)\,m(x)\,dx\right\}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\hat{m}(y)}dy$$

$$=\underbrace{\exp\left\{i\int\hat{m}(x)m(x)dx\right\}}_{\text{nezajímavé}}\left\{\exp\left\{i\int h(x)m(x)dx\right\}\int_{\mathbb{R}}e^{-i\hat{m}(y)-ih(y)}dy-\int_{\mathbb{R}}e^{-i\hat{m}(y)}dy\right\}$$

$$\left\{\quad\right\}\overset{1.\,\text{řád}}{\underset{h}{\cong}}\left[1+i\int h(x)m(x)dx\right]\int_{\mathbb{R}}e^{-i\hat{m}(y)}\left[1-ih(y)\right]dy-\int_{\mathbb{R}}e^{-i\hat{m}(y)}dy$$

$$\cong i\int h(x)m(x)dx\int_{\mathbb{R}}e^{-i\hat{m}(y)}dy-i\int_{\mathbb{R}}e^{-i\hat{m}(y)}h(y)dy$$

$$=i\int h(x)\left\{m(x)\cdot\int_{\mathbb{R}}e^{-i\hat{m}(y)}dy-e^{-i\hat{m}(x)}\right\}dx$$

$$\Rightarrow\quad e^{-i\hat{m}(x)}=m(x)\int_{\mathbb{R}}e^{-i\hat{m}(y)}dy$$

$$+i\hat{m}(x)=-\ln m(x)-\mathrm{Log}\left(\int_{\mathbb{R}}e^{-i\hat{m}(y)}dy\right)$$

$$\Rightarrow\exp\left\{i\int dx\,\hat{m}(x)m(x)\right\}\cdot\int_{\mathbb{R}}e^{-i\hat{m}(y)}dy$$

$$\overset{?!}{=}\exp\left\{i\int dx\,\hat{m}(x)m(x)+\mathrm{Log}\left(\int_{\mathbb{R}}e^{-i\hat{m}(y)}dy\right)\right\}$$

$$=\exp\left\{\cancel{i}\int dx\,m(x)\left\{-\ln m(x)-\cancel{\mathrm{Log}\left(\int_{\mathbb{R}}e^{-i\hat{m}(y)}dy\right)}\right\}+\cancel{\mathrm{Log}\left(\int_{\mathbb{R}}e^{-i\hat{m}(y)}dy\right)}\right\}$$

$$=e^{-\int m(x)\ln m(x)dx}$$

... celkem $I_N[m(x)]\sim\exp\left(-N\int dx\,m(x)\ln m(x)\right)$.

$$Z_{N,\beta} \simeq C_{N,\beta} \int \mathcal{D}[n(x)]\, e^{-\beta N^2 \tilde{\mathcal{F}}_0[n(x)]} \cdot e^{-N \tilde{\mathcal{F}}_1[n(x)]}$$

$$\mathcal{F}_0[n(x)] = \frac{1}{2}\int x^2 n(x)\,dx - \frac{1}{2}\iint n(x) n(x') \ln|x-x'|\, dx\, dx'$$

$$\mathcal{F}_1[n(x)] = \int n(x) \ln[n(x)]\, dx$$

... dyby

$$e^{\frac{\beta}{2}\ln N \cdot N} \cdot e^{\frac{\beta}{2} N \tilde{\mathcal{F}}_1(n(x))} \cdot e^{-\frac{\beta N}{2}\ln c}$$

Hledáme sedlový bod integrálu za podmínky $\int n(x)\,dx = 1$.

... Lagrangeovy multiplikátory ... a nebo opět Dirac!

$$\int n(x)\,dx = 1 \;\dots\; \delta\Big[\int_{\mathbb{R}} n(x)\,dx - 1\Big] \dots = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi}\, e^{ik\left(\int_{\mathbb{R}} n(x)\,dx - 1\right)}$$

Zaměníme-li $ik \to \beta N^2 \varkappa$, pak

$$Z_{N,\beta} \simeq C'_{N,\beta} \int \mathcal{D}[n(x)] \int d\varkappa\, e^{-\beta N^2 S[n(x),\varkappa] + \mathcal{O}(N)}$$

$$S[n(x),\varkappa] = \mathcal{F}_0[n(x)] - \varkappa\left(\int dx\, n(x) - 1\right)$$

Hledáme sedlový bod $S[n(x),\varkappa]$ ... $n^*(x), \varkappa^*$

$$0 = \frac{\partial S[n(x),\varkappa]}{\partial n(x)} \;;\; 0 = \frac{\partial S[n(x),\varkappa]}{\partial \varkappa} = -\left(\int dx\, n(x) - 1\right)$$

? $\parallel$ $\qquad\qquad \Rightarrow \int n^*(x)\,dx = 1$

$$\frac{x^2}{2} - \int_{\mathbb{R}} dx' \left[n^*(x') \ln|x-x'|\right] - \varkappa^*$$

$$S[n(x)+h(x),\varkappa]-S[n(x),\varkappa]=$$

$$=\mathcal{F}_0[n(x)+h(x)]-\mathcal{F}_0[n(x)]-\underbrace{\varkappa\int[n(x)+h(x)]dx+\varkappa\int n(x)dx}_{-\varkappa\int h(x)dx}$$

$$=\frac{1}{2}\int[n(x)+h(x)]\cdot x^2dx-\frac{1}{2}\int[n(x)]x^2dx$$

$$-\frac{1}{2}\iint\ln|x-x'|\{-n(x)n(x')+[n(x)+h(x)][n(x')+h(x')]\}dxdx'-\varkappa\int h(x)dx$$

$$\cong\frac{1}{2}\int x^2h(x)dx-\frac{1}{2}\iint\ln|x-x'|\{h(x)n(x')+h(x')n(x)\}dxdx'-\varkappa\int h(x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int x^2h(x)dx-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\iint\ln|x-x'|h(x)n(x')dxdx'-\varkappa\int h(x)dx$$

$$=\int\Big[\underbrace{\frac{x^2}{2}-\int\ln|x-x'|n(x')dx'-\varkappa}_{=0\ \forall x}\Big]h(x)dx$$

$=0\ \forall x$ jinak najdeme $h(x)$ .. směr poklesu $S[n(x),\varkappa]$.

- Potřebujeme tedy najít $n^*(x)$ s
  - $n^*(x)\geq 0$
  - $\int n^*(x)dx=1$
  - $\frac{x^2}{2}-\int\ln|x-x'|n^*(x')dx'=\varkappa$ $\forall x\in\mathbb{R}$. $\boxed{\forall x\in \operatorname{supp} n^*}$

- První pozorování: $n^*(x)$ musí mít omezený nosič!

... Bylo-li by $x\in\operatorname{supp} n^*$ neomezené, pak pro $x\to\infty$

$$\int\ln|x-x'|n^*(x')dx'\sim\ln x\int n^*(x')dx'=\ln x$$

... odporuje řešení $x^2/2$!

... budiž $\operatorname{supp} n^*=[a,b]$.

... Rovnici vyderivujeme podle x, ale ve slabém slova smyslu

$$\dots \int_a^b u(x)\varphi'(x)dx = -\int_a^b \nu(x)\varphi(x)dx \quad \dots u' = \nu; \ \varphi(a) = \varphi(b) = 0$$

Položme $u(x) = \int m^*(x') \ln|x - x'| dx'$

$$\int \varphi'(x) u(x) dx = \int \varphi(x) \left[\int m^*(x') \ln|x - x'| dx' \right] dx$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int \varphi'(x) \left[\int m^*(x') \ln[(x-x')^2 + \varepsilon^2] dx' \right] dx$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int \varphi(x) \left[\int m^*(x') \frac{2(x-x')}{(x-x')^2 + \varepsilon^2} dx' \right] dx$$

$$= -\int \varphi(x) \left[\mathcal{P}_r \int dx' \frac{m^*(x')}{x - x'} \right] dx$$

$$\mathcal{P}_r \int F(x') dx' = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\int^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon} \right] F(x') dx'; \text{ pro } x \text{ sing. bod } F.$$

Hledáme tedy řešení rovnice $\mathcal{P}_r \int dx' \frac{m^*(x')}{x - x'} = x \quad \dots = \left(\frac{x^2}{2}\right)'. \quad \dots x \in \operatorname{supp} m^*$

Výraz nalevo je znám jako Hilbertova transformace

Pro $f \in \mathbb{R}$ je $(Hf)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x - y} dy = \mathcal{P}_r \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x - y} dy$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\pi} \int_{y : |y - x| > \varepsilon} \frac{f(y)}{x - y} dy = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\pi} \int_{y : |y| > \varepsilon} \frac{f(x - y)}{y} dy$$

... cancellation property

⋮

$(Hf)^\wedge(\xi) = -i \operatorname{sgn}(\xi) \hat{f}(\xi)$. Např. $(H\chi_{[a,b]})(\xi) = \frac{1}{\pi} \ln\left|\frac{\xi - a}{\xi - b}\right|$

Zde je obor integrace i celá rovnice omezena na $[a,b]$ ... Fourierova transf. je tedy problematická

Tricomi: Finite Hilbert transform

$$\mathrm{Pr}\int_a^b dx'\,\frac{f(x')}{x-x'} = g(x) \Rightarrow f(x) = \frac{C - \mathrm{Pr}\int_a^b \frac{dt}{\pi}\,\frac{\sqrt{(t-a)(b-t)}}{x-t}\,g(t)}{\pi\sqrt{(x-a)(b-x)}}$$

Položíme-li $g(x)=x$ a $\int n^*(x')dx'=1 \Rightarrow$

$$n^*(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{(x-a)(b-x)}}\left[1 - x^2 + \frac{1}{2}(a+b)x + \frac{1}{8}(b-a)^2\right].$$

- Spočteme "volnou energii" $f = F_0[n^*(x)]$ v závislosti na $\{a,b\}$ a vybereme a,b tak, aby f byla minimální!
  - lze spočítat přímo ... nebo pomocí pár triků

$$f = F_0[n^*(x)] = \frac{1}{2}\int dx\,[x^2 n^*(x)] - \frac{1}{2}\iint dx\,dx'\,[n^*(x)\,n^*(x')\ln|x-x'|]$$

... vynásobíme rovnici $\frac{x^2}{2} - \int dx'\,n^*(x')\ln|x-x'| - \varkappa = 0$ faktorem $n^*(x)$ a integrujeme přes x:

$$\iint dx\,dx'\,[n^*(x')\,n^*(x)\ln|x-x'|] = \frac{1}{2}\int dx\,[n^*(x)\,x^2] - \varkappa\underbrace{\int n^*(x)dx}_{=1}$$

$$\Rightarrow f = \frac{1}{2}\int dx\,[x^2 n^*(x)] - \frac{1}{4}\int dx\,[n^*(x)\,x^2] + \frac{\varkappa}{2} = \frac{1}{4}\int dx\,[x^2 n^*(x)] + \frac{\varkappa}{2}.$$

Ještě dopočteme κ ... $\frac{a^2}{2} - \int_a^b dx' [n^*(x') \ln|x'-a|] - \kappa = 0$

... $x = a$

$$\Rightarrow f = \frac{1}{4}\int dx [x^2 n^*(x)] + \frac{a^2}{4} - \frac{1}{2}\int_a^b dx [n^*(x) \ln(x-a)].$$

• Dosadíme-li vše dohromady & vypočteme integrály

$$f = f(a,b) = \frac{1}{512}\Big(-9a^4 + 4a^3 b + 2a^2(5b^2+48) + 4ab(b^2+16) - 256 \ln(b-a) - 9b^4 + 96 b^2 + 512 \ln(2)\Big)$$

... minimalizace přes a, b : $a = -\sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$

$$\Rightarrow n^*(x) = \frac{1}{\pi}\sqrt{2 - x^2}.$$