4, Markovské řetězce se spojitým časem

- proces $X=(X_t)_{t\geq 0}$ s hodnotami v $\mathbb{Z}$
- platí Markovská vlastnost

$$\mathbb{P}(X_t=j \mid X_s=i, X_{t_m}=i_m, \dots, X_{t_1}=i_1)=\mathbb{P}(X_t=j \mid X_s=i)$$

pro $i_1,\dots,i_m,i,j\in\mathbb{Z}$, $0\leq t_1\leq\dots\leq t_m<s<t$

- $p_{ij}(s,t)=\mathbb{P}(X_t=j \mid X_s=i)$, $s<t$

... budeme předpokládat, že $p_{ij}(s,s+t)=p_{ij}(t)$ ... "homogenní" řetězec

- Matice $\underline{P}(t)=[p_{ij}(t)]_{i,j\in\mathbb{Z}}$; $\underline{P}(0)=\underline{I}d$

- Opět platí $\sum_{j\in S} p_{ij}(t)=\sum_{j\in S}\mathbb{P}(X_t=j \mid X_0=i)=1$

a $p(t)^T=p(0)^T\underline{P}(t)$, kde $p_j(t)=\mathbb{P}(X_t=j)$

- Chapman-Kolmogorovy rovnice

$$p_{ij}(t+s)=\mathbb{P}(X_{t+s}=j \mid X_0=i)=\sum_{l\in S}\mathbb{P}(X_{t+s}=j \,\&\, X_s=l \mid X_0=i)$$

$$=\sum_{l\in S}\frac{\mathbb{P}(X_{t+s}=j, X_s=l, X_0=i)}{\mathbb{P}(X_s=l, X_0=i)}\cdot\frac{\mathbb{P}(X_s=l, X_0=i)}{\mathbb{P}(X_0=i)}=$$

$$=\sum_{l\in S}\underbrace{\mathbb{P}(X_{t+s}=j \mid X_s=l, X_0=i)}_{=\mathbb{P}(X_{t+s}=j \mid X_s=l)}\cdot\mathbb{P}(X_s=l \mid X_0=i)=\sum_{l\in S}p_{il}(s)\,p_{lj}(t)$$

$$=[\underline{P}(s)\underline{P}(t)]_{i,j} \quad \dots \quad \underline{P}(t+s)=\underline{P}(s)\underline{P}(t)\dots=\underline{P}(t)\underline{P}(s)$$

Lze ukázat, že • ex. $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{1-p_{ii}(h)}{h} =: q_{ii}$

• ex. $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{p_{ij}(h)}{h} =: q_{ij}$, $i \neq j$

$Q = [q_{ij}]_{i,j\in S}$ ... generátor operátorové semigrupy $(\underbrace{P(t)}_{=P_t})_{t\geq 0}$.

$Q = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{P(h)-Id}{h}$ ... pak platí $P'_{t_0} = \lim\limits_{t\to t_0^+} \dfrac{P_t - P_{t_0}}{t-t_0} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{P_{t_0+h}-P_{t_0}}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{P_h P_{t_0} - P_{t_0}}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \left(\dfrac{P_h - Id}{h}\right) P_{t_0} = Q P_{t_0}$ ... stejně $P'_{t_0} = P_{t_0} Q$

Příklad: V dílně je pět strojů a opravář. Každý stroj pracuje, dokud se nepokazí, což se děje s exp. rozdělením s parametrem 0,2 (v hodinách). Na druhou stranu, oprava každého stroje je náh. veličina s exp. rozdělením s parametrem 0,5 (v hodinách). V každou chvíli probíhá oprava na nejvýše jednom stroji. Spočtěte, kolik času stráví v dlouhodobém průměru bez práce... nebo kolik běží v průměru strojů...?

Řešení: • $(X_t)_{t\geq 0}$, kde $X_t \in \{0;1;2;3;4;5\}$ je počet strojů, které pracují v čase $t \geq 0$.

• exp. rozdělení s $\lambda > 0$ má hustotu $\lambda e^{-\lambda x}$

• Pro $X_t \in \{1,\dots,5\}$, $X_t = k$ chceme určit intenzitu přechodu na $k-1$ ... Doba příští poruchy stroje i ... τ_i

$\mathbb{P}(\min(\tau_1,\dots,\tau_k) > \tilde{t}) = \mathbb{P}(\tau_1 > \tilde{t},\dots,\tau_k > \tilde{t}) = \mathbb{P}(\tau_1 > \tilde{t}) \cdots \mathbb{P}(\tau_k > \tilde{t}) = (e^{-\mu\tilde{t}})^k = e^{-k\mu\tilde{t}}$

... čas k první poruše některého z k strojů má tedy

exp. rozdělení s par. μk

- $\mathbb{P}(X_{t+h}=k \mid X_t=k)$ ... v čase $(t, t+h)$ nedojde k poruše, $h>0$ malé

$\approx \mathbb{P}(\min(\tau_1, \dots, \tau_k) > h)$

- Stejný postup pro opravy ... $(e^{-k\mu t})'_{t=0} = -k\mu$

$(e^{-\lambda t})'_{t=0} = -\lambda$

- Generátor

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu & -\mu-\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & -2\mu-\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3\mu & -3\mu-\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4\mu & -4\mu-\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5\mu & -5\mu \end{bmatrix}$$

Pozn. $\sum_j q_{ij} = q_{ii} + \sum_{j \neq i} q_{ij} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[P_{ii}(h) - 1 + \sum_{j \neq i}' P_{ij} \right] = 0$

Stacionární rozdělení: $\pi Q = 0$ ... $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5)$

... sestavit soustavu, zkombinovat s $\sum_{i=0}^{5} \pi_i = 1$, & řešení ... π_5.

Střední počet pracujících strojů $\sum_{j=0}^{5} j \pi_j$.

Poissonův proces (= čítací proces)

Definice: • Poissonovo rozdělení $\mathbb{P}(N=n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$, $\lambda > 0$

• Náhodný proces $(N_t)_{t \geq 0}$ je (homogenní) Poissonův proces s intenzitou $\lambda > 0$, pokud platí

1, $N_0 = 0$ skoro jistě

2, $(N_t)_{t \geq 0}$ má nezávislé přírůstky

$\forall\, 0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ jsou $N_{t_1}, N_{t_2} - N_{t_1}, \ldots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$ nezávislé

3, $\forall\, t \geq s$: $N_t - N_s$ má Poiss. rozdělení s par. $\lambda(t-s)$

4, Skoro všechny trajektorie $(N_t)_{t \geq 0}$ jsou zprava spojité s ex. limita zleva

Pozn.: • $N_t = N_t - N_0$ – Poiss. s par. λt

• $\lambda = 1$ ... standardní Poissonův proces

• homogenní ... λ nezávisí na čase

• N_t ... (náhodný) počet příchodů událostí do času $t > 0$

"homogenní" - intenzita příchodů nezávisí na t

• Existence: Daniell-Kolmogorov

Věta: Pro Poissonův proces $N = (N_t)_{t \geq 0}$ a $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, $0 \leq k_1 \leq k_2 \leq \ldots \leq k_n$ platí

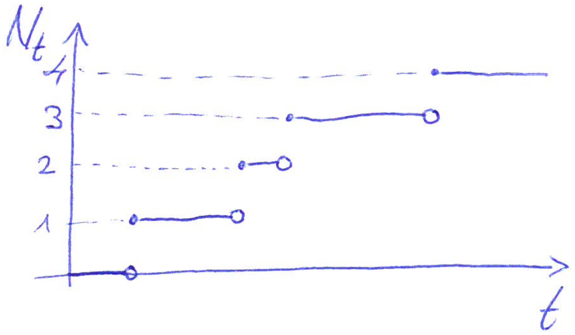
$t_0=0, k_0=0$

$$\mathbb{P}(N_{t_1}=k_1, N_{t_2}=k_2, \dots, N_{t_n}=k_n)=\mathbb{P}(N_{t_1}-N_{t_0}=k_1-k_0, \dots, N_{t_n}-N_{t_{n-1}}=k_n-k_{n-1})$$

$$=e^{-\lambda(t_1-t_0)}\cdot\frac{[\lambda(t_1-t_0)]^{k_1-k_0}}{(k_1-k_0)!}\cdots e^{-\lambda(t_n-t_{n-1})}\frac{[\lambda(t_n-t_{n-1})]^{k_n-k_{n-1}}}{(k_n-k_{n-1})!}$$

$$=e^{-\lambda t_n}\lambda^{k_n}\prod_{j=1}^{n}\frac{(t_j-t_{j-1})^{k_j-k_{j-1}}}{(k_j-k_{j-1})!}$$

- Přírůstky jsou stacionární $N_t-N_s \sim N_{t+h}-N_{s+h}$ ... Poisson s $\lambda(t-s)$
- Trajektorie



- $X_i \sim Poi(\alpha_i)$, nezávislé $\Rightarrow \alpha := \sum_{i=1}^{n}\alpha_i$ & $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Poi(\alpha)$.

Věta: Buď $N=(N_t)_{t\geq 0}$ homogenní Poissonův proces s intenzitou $\lambda>0$.

Pak 1, $\mathbb{E}N_t=\lambda t=Var\, N_t$

2, $Cov(N_t,N_s)=C_N(t,s)=C_N(s,t)=\lambda\min(s,t)$

Důkaz - cvičení

Markovská vlastnost ... obecně: nez. přírůstky => Markovská vlastnost

Věta: Nechť $N=(N_t)_{t\geq 0}$ je ~~Po~~ Poissonův proces. Pak pro

$\forall\, 0<t_1<\dots<t_n<t$ a $0\leq k_1\leq\dots\leq k_n\leq l$ platí

$$\mathbb{P}(N_t=l \mid N_{t_1}=k_1,\dots,N_{t_n}=k_n)=\mathbb{P}(N_t=l \mid N_{t_n}=k_n).$$

Důkaz:

$$\downarrow = \frac{\mathbb{P}(N_t=l, N_{t_1}=k_1,\dots,N_{t_n}=k_n)}{\mathbb{P}(N_{t_1}=k_1,\dots,N_{t_n}=k_n)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(N_{t_1}=k_1, N_{t_2}-N_{t_1}=k_2-k_1,\dots,N_{t_n}-N_{t_{n-1}}=k_n-k_{n-1}, N_t-N_{t_n}=l-k_n)}{\mathbb{P}(N_{t_1}=k_1, N_{t_2}-N_{t_1}=k_2-k_1,\dots,N_{t_n}-N_{t_{n-1}}=k_n-k_{n-1})}$$

$$\overset{\text{nezávislé}}{\underset{\text{součin \& zkrátit}}{=}} \mathbb{P}(N_t-N_{t_n}=l-k_n)$$

Stejně $$\mathbb{P}(N_t=l \mid N_{t_n}=k_n)=\frac{\mathbb{P}(N_t=l, N_{t_n}=k_n)}{\mathbb{P}(N_{t_n}=k_n)}=\frac{\mathbb{P}(N_t-N_{t_n}=l-k_n, N_{t_n}=k_n)}{\mathbb{P}(N_{t_n}=k_n)}$$

$$\overset{\text{nez.}}{=} \mathbb{P}(N_t-N_{t_n}=l-k_n).$$ ∎

- Další vlastnosti trajektorií - později
- Příklad: Yuleův proces