Časové řady

$(X_t)_{t\in I}$, např. $I=\mathbb{Z}$

- Např. $X_t=\varepsilon_t+0.5\varepsilon_{t-1}$, $\varepsilon_t\sim N(0,1)$ i.i.d.

$$\Rightarrow \mathbb{E}X_t=0,\ C(s,t)=R(s,t)=$$

$$=\begin{cases} s=t:\ \mathbb{E}(X_t^2)=1{,}25 \\ s=t+1:\ \mathbb{E}(\varepsilon_t+0.5\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t+1}+0.5\varepsilon_t)=0{,}5 \\ 0\ \dots\ s>t+1 \end{cases}$$

- Slabě stacionární: $\mathbb{E}X_t=\mu$; $\mathbb{E}(X_{t+k}-\mu)(X_t-\mu)=R(t+k,t)=\tilde{R}(k)$.
- Náhodná procházka: $X_{t+1}=X_t+\varepsilon_t$
- MA(n) model: $X_t=b_0Y_t+b_1Y_{t-1}+\dots+b_nY_{t-n}$, $t\in\mathbb{Z}$

$Y_t\dots\sim N(0,\sigma^2)$ i.i.d. (white noise), $b_i\in\mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$)

$$R(t)=\begin{cases}\sigma^2\sum_{k=0}^{n-t}b_{k+t}\bar{b}_k, & 0\le t\le n\\ \overline{R(-t)}, & -n\le t\le 0\\ 0, & \text{jinak}\end{cases}$$

Spektrální hustota $f_X(\lambda)=\frac{\sigma^2}{2\pi}\left|\sum_{k=0}^{n}b_ke^{-ik\lambda}\right|^2$, $\lambda\in[-\pi,\pi]$.

- Může být i $n=\infty$: MA(∞), $X_t=\sum_{j=0}^{\infty}b_jY_{t-j}$, $R(t)=\sigma^2\sum_{k=0}^{\infty}b_{k+t}\bar{b}_k$, $t\ge 0$

$=\overline{R(-t)}$, $t\le 0$

$AR(m)$: $X_t + a_1 X_{t-1} + \dots + a_m X_{t-m} = Y_t$; $Y_t \sim N(0,\sigma^2)$, i.i.d., $t \in \mathbb{Z}$

$m=1$: $X_t = a X_{t-1} + Y_t$

Hledáme vyjádření $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} b_j Y_{t-j} = a\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j Y_{t-1-j}\right) + Y_t$

Y_t: $b_0 = a \cdot 0 + 1 \dots b_0 = 1$

Y_{t-1}: $b_1 = a \cdot b_0 + 0 \dots b_1 = a b_0 = a$

Y_{t-2}: $b_2 = a \cdot b_1 + 0 \dots b_2 = a b_1 = a^2$ $\quad \dots \quad X_t = \sum_{j=0}^{\infty} a^j Y_{t-j}$

X_t závisí jen na Y_s, $s \le t$ – „kauzální"

… konvergence pro $|a| < 1$.

Dále $\underbrace{X_t = a X_{t-1} + Y_t}_{\cdot X_{t-1};\ \cdot Y_t} = a(X_{t-2} + Y_{t-1}) + Y_t = \dots = a^k X_{t-k} + \sum_{l=0}^{k-1} a^l Y_{t-l}$

Pak $\mathbb{E} X_t X_{t-1} = a \mathbb{E} X_{t-1}^2 + \mathbb{E} X_{t-1} Y_t \Rightarrow R(1) = a R(0) + 0$

$\mathbb{E} X_t Y_t = \underbrace{a \mathbb{E} X_{t-1} Y_t}_{=0} + \mathbb{E} Y_t^2 \Rightarrow \sigma^2 = \mathbb{E} X_t Y_t = \mathbb{E}(X_t - a X_{t-1}) X_t$

$= R(0) - a R(1)$

$\Rightarrow R(0) = \dfrac{\sigma^2}{1-a^2}$

Tento postup lze užít obecně (Yule-Walkerovy rovnice)

- Rovnici $X_t = a_1 X_{t-1} + \dots + a_m X_{t-m} + Y_t$ pronásobíme $X_{t-1}, \dots, X_{t-m}$

$\Rightarrow \mathbb{E} X_t X_{t-k} = a_1 \mathbb{E} X_{t-1} X_{t-k} + \dots + a_m \mathbb{E} X_{t-m} X_{t-k} + \mathbb{E} Y_t X_{t-m}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} R(0) & \dots & R(m-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R(m-1) & \dots & R(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(1) \\ \vdots \\ R(m) \end{pmatrix} \Rightarrow \text{vypočet } R.$$

Lze ale užít i naopak! Zdát odhadnout $R(0), R(1), \dots$ a pak získat a_j.

Odhad $\hat{R}(0), \hat{R}(1), \dots, \hat{R}(m)$ na základě pozorování $X_1, \dots, X_n$?

$$\hat{R}(k) = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n-k} \left(X_{i+k} - \frac{1}{n-k} \sum_{j=1}^{n-k} X_{j+k} \right) \left(X_i - \frac{1}{n-k} \sum_{j=1}^{n-k} X_j \right) \dots$$

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i .$$

Autoregresní (AR) a klouzavé průměry (Moving averages MA)

lze kombinovat:

$$\text{ARMA}(m,n): \quad X_t + a_1 X_{t-1} + \dots + a_m X_{t-m} = Y_t + b_1 Y_{t-1} + \dots + b_n Y_{t-n}, \; t \in \mathbb{Z}$$

Věta: Nechť $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je stacionární ARMA(m,n) posloupnost.

Nechť $a_m(z) = 1 + a_1 z + \dots + a_m z^m$, $b(z) = 1 + b_1 z + \dots + b_n z^n$ nemají

spol. kořen a kořeny $b(z)$ leží vně jednotkové kružnice.

Pak X_t lze napsat jako $\quad Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} d_j X_{t-j} \quad$ (= invertibilní)

a d_j jsou určeny z $\quad \sum_{j=0}^{\infty} d_j z^j = \frac{a(z)}{b(z)}, \; |z| \leq 1.$

"Cvičení": Predikce ARMA(2,1) modelu

$$(*) \qquad X_t - 0{,}1 X_{t-1} - 0{,}12 X_{t-2} = Y_t - Y_{t-1} \cdot 0{,}7, \quad t \in \mathbb{Z}$$

- $a(z) = 1 - 0{,}1z - 0{,}12z^2$, $\underbrace{b(z) = 1 - 0{,}7z}_{\frac{10}{7}}$ … žádné spol. kořeny

$\underbrace{5/2, -10/3}_{\Rightarrow \text{mimo kruh}}$ $\qquad \frac{10}{7}$ … invertibilní $\Rightarrow$ Dosadíme $Y_t = \sum_{k=0}^{\infty} d_k X_{t-k}$ do $(*)$

$\Rightarrow X_t$ je centr., kauzální slabě stac.

$d_0 = 1$

$d_1 - d_0 \cdot 0{,}7 = -0{,}1$ $\qquad d_k = 0{,}7 d_{k-1}, \; k \geq 3$

$d_2 - 0{,}7 d_1 = -0{,}12$

Z (*): $X_t - 0{,}1 X_{t-1} - 0{,}12 X_{t-2} = Y_t - 0{,}7 \sum_{k=0}^{\infty} d_k X_{t-1-k}$

Vyjádříme $X_t = \underbrace{fce\ X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots}\ + Y_t$

Známe-li empirické hodnoty $\hat{X}_{t-1}, \hat{X}_{t-2}, \ldots$, pak odhadneme $\hat{X}_t$ z této rovnice.