Derivace ~~s~~ náhodného procesu

Definice: Nechť $(X_t)_{t\in I}$ je proces s konečnými druhými momenty. Pokud existuje limita (podle kvadratického středu)

$$L_2\text{-}\lim_{h\to 0} \frac{X_{t_0+h}-X_{t_0}}{h},$$

nazveme ji derivací $(X_t)_{t\in I}$ podle kv. středu v t_0; značíme X'_{t_0}.

Věta: Nechť $(X_t)_{t\in I}$ má konečné druhé momenty.

- Pak platí • je-li $(X_t)_{t\in I}$ centrovaný, pak má L_2-derivaci v $t_0\in I'$ právě tehdy, když ex.

$$\lim_{h,h'\to 0}\frac{1}{hh'}\left[R(t_0+h,t_0+h')-R(t_0,t_0+h')-R(t_0+h,t_0)+R(t_0,t_0)\right]$$

- Pokud $\mu(t) = \mathbb{E}X_t$, pak $(X_t)_{t\in I}$ má L_2-derivaci v t_0, pokud ex. $\mu'(t_0)$ a ex. limita výše.

Bez Důkazu.

Příklad: Pro Poissonův proces je $\mu_t=\lambda t$ a $C(s,t)=\lambda\min(s,t)$.

Protože ale

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h^2}\Big[\min(t_0+h,t_0+h)-\min(t_0,t_0+h)-\min(t_0+h,t_0)+\min(t_0,t_0$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h^2}\Big[(t_0+h)-(t_0+\cancel{h})-(t_0+\cancel{h})+t_0\Big]=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h^2}=+\infty$$

$$\text{a }\lim_{h\to 0^-}\frac{1}{h^2}\Big[t_0+h-(t_0+h)-(t_0+h)+t_0\Big]=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h^2}=+\infty$$

... derivace neexistuje!

(Podobně Wienerův proces)